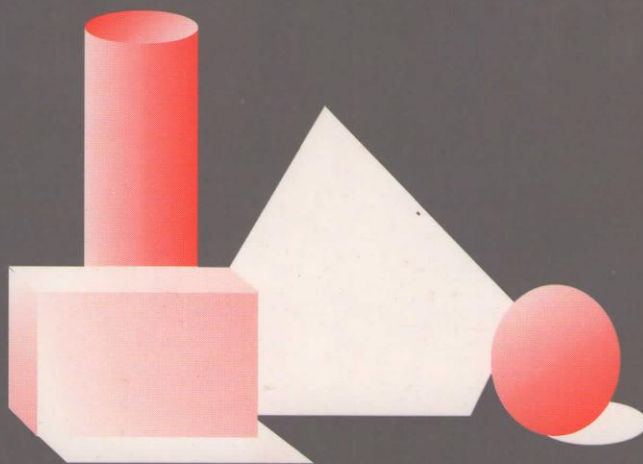
SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO – SÃO PAULO
COORDENADORIA DE ESTUDOS E NORMAS PEDAGÓGICAS
VITAE – APOIO À CULTURA, EDUCAÇÃO E PROMOÇÃO SOCIAL

7ª SÉRIE

experiências matemáticas

GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO
SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
COORDENADORIA DE ESTUDOS E NORMAS PEDAGÓGICAS

Governador: Luiz Antonio Fleury Filho

Secretário: Carlos Estevam Aldo Martins

Coordenadora: Regina Maria Ferraz Elero Ivamoto

EXPERIÊNCIAS MATEMÁTICAS
7ª série

Versão preliminar

Elaboração:
Célia Maria Carolino Pires
Dulce Satiko Onaga
Maria Nunes
Ruy Cesar Pietropaolo
Suzana Laino Cândido
Vinício de Macedo Santos

Colaboração:
José Carlos F. Rodrigues

SÃO PAULO

1994

Aos Professores

Quando se considera o ato de aprender como uma construção, por parte do aluno, surgem indagações sobre o que significa ensinar nessa circunstância, e qual é o papel do professor, se o protagonista do processo é o próprio aluno.

O Projeto **Experiências Matemáticas** procura responder a estas expectativas contribuindo para a realização de um trabalho em sala de aula em que o aluno se engaja no processo de produção matemática.

É com essa perspectiva que a **Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas** apresenta este trabalho para apoiar a ação docente.

Regina Maria Ferraz Elero Ivamoto

Coordenadora da CENP

Apresentação

Este material é produto do projeto Experiências Matemáticas - um trabalho integrado com professores de 5ª s a 8ª s séries do ensino fundamental - cujo desenvolvimento foi iniciado, junto à rede pública estadual de São Paulo, em 1993.

Esse projeto, elaborado por membros da Equipe Técnica de Matemática da Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas - CENP - e mais dois professores convidados foi apresentado à Fundação Vitae - Apoio à Cultura, Educação e Promoção Social - que, aprovando-o, responsabilizou-se pelo financiamento em 1993, da elaboração da primeira etapa das testagens e da reelaboração, cabendo à Secretaria de Estado da Educação, como contrapartida, a impressão desta versão, e implementação do trabalho com o material, tendo em vista uma avaliação mais abrangente do projeto. A capacitação dos professores aplicadores e o acompanhamento e avaliação do material em sala de aula também ocorrerá sob a responsabilidade da Equipe Técnica de Matemática da CENP que envolverá, nesse processo, Assistentes de Apoio Pedagógico, Diretores de Escola e Supervisores de Ensino.

É importante ressaltar que o desenvolvimento desse projeto foi motivado, essencialmente, pelos resultados do trabalho com as **"Atividades Matemáticas",** conjunto de sugestões destinadas aos professores de Ciclo Básico, 3as e 4as séries que, segundo depoimentos de professores e especialistas da área, têm contribuído para a renovação do ensino de Matemática não apenas na rede pública estadual paulista, nas escolas municipais, particulares e mesmo, em outros estados brasileiros.

Nos últimos anos, inúmeras solicitações foram feitas no sentido de que déssemos continuidade ao trabalho, estendendo-o às séries finais do ensino

fundamental, inclusive para atender aos alunos que, acostumados a aulas mais dinâmicas, a participarem ativamente da construção do conhecimento, a questionarem os porquês das regras matemáticas, das técnicas, das convenções adotadas etc., não aceitavam as aulas tradicionais e o papel de meros espectadores.

Os objetivos de um projeto, evidentemente, só se concretizam com o empenho de muitas pessoas. Por isso, não podemos deixar de externar alguns agradecimentos:

Agradecemos à **FUNDAÇÃO VITAE**, por acreditar nesse trabalho e contribuir para sua viabilização, demonstrando seu compromisso com a melhoria da qualidade do ensino, num momento tão delicado por que passa a educação brasileira.

Agradecemos aos colegas Conceição Aparecida Tavares Bongiovanni e José Carlos Fernandes Rodrigues por sua colaboração no desenvolvimento do projeto.

Agradecemos aos Assistentes de Apoio Pedagógico das Delegacias de Ensino que colaboraram com crítica e sugestões e, especialmente, aos das Delegacias de Ensino que participaram da primeira etapa das testagens:

- Iara Aparecida Siqueira - DE de Catanduva/DRE São José do Rio Preto
- Luiza Mieko Terezinha Lôbo – 1ª DE Guarulhos/DRE Norte
- Maria Aparecida de Jesus Ortigosa - DE de Garça/DRE de Marília
- Maria José Merlin Benedetti – 1ª DE de São Bernardo do Campo/DRE Sul.

Agradecemos aos Professores Aplicadores que testaram o material e que contribuíram de forma significativa para o projeto, mostrando o compromisso do educador com o aperfeiçoamento necessário e constante de seu trabalho:

- Antonio Marcos Torres, Francisco Fernando Bidoia, Marilda da Silva Lopes Flores, Sandra Helena Siqueira, de escolas da DE de Catanduva.

- Álvaro Torres Galindo, Eunyce Cagniatti Gallina, Fábio Roquini, Manuel da Costa
  Fernandes, de escolas da 1ª DE de Guarulhos.
- Geni Segura Athayde, Maria de Fátima Vieira Grandizoli Moura, Odete Guirro de
  Paula, Wilma Mutuco Tagami, de escolas da DE de Garça.
- Cecília Maria da Silva Gomes, Cleonice Garcia Martins, Marlene Basileu da
  Silva Rodrigues, Vanda Lopes de Araujo, de escolas da DE de São Bernardo do
  Campo.

Finalmente, gostaríamos de convidar a todos os professores de Matemática, especialmente aos da rede estadual a ler, debater, criticar as sugestões de trabalho contidas nesta publicação para que elas possam ser aperfeiçoadas.

Equipe de elaboração

SUMÁRIO

ATIVIDADE 1: IGUALDADE

OBJETIVOS: Constatar e aplicar as propriedades da igualdade.

PARTE 1: BALANÇAS E IGUALDADES.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo I-1.

DESENVOLVIMENTO:

Entregue a cada aluno uma folha-tipo I-1 e diga a eles que as tabelas nela apresentadas representam registros de uma atividade feita por um grupo de alunos. A atividade consistia no seguinte:

O primeiro aluno recebe uma balança de dois pratos, vários cubinhos e pequenas esferas. Os cubinhos são todos do mesmo tamanho e de mesmo peso assim como as esferas que têm todos os mesmos tamanhos e peso.

A tarefa desse aluno é equilibrar a balança usando o material recebido. Isto feito, passa a balança equilibrada para o aluno seguinte. Este, deverá fazer duas alterações sucessivas nos pratos da balança mantendo o seu equilíbrio, fazer o registro tanto do que ficou em cada prato como das operações feitas e passar a balança para o aluno seguinte que, por sua vez, também faz duas alterações sem desequilibrar a balança e assim, por diante.

Peça aos alunos que completem cada tabela com as operações efetuadas em cada caso. Combine com eles que a letra **c** será usada para designar o cubo e a letra **e** para designar a esfera.

Uma vez completadas as tabelas, peça que comparem as respostas que deram com as dos colegas. A seguir somente as respostas com a classe toda.

Durante esses comentários faça-os verbalizar os tipos de alterações que podem ser feitas nos pratos da balança de modo a manter o equilíbrio. Vá colocando na lousa as sugestões dos alunos. Por exemplo:

- Reduzir à metade as quantidades de ambos os pratos da balança.

- Multiplicar as quantidades de ambos os pratos da balança pelo mesmo número.

- Acrescentar ou retirar os mesmos pesos em ambos os pratos da balança.

Explique então que será passada pela classe, uma outra tabela mostrando a situação inicial de uma balança em equilíbrio. Cada aluno deverá preencher uma linha da tabela propondo uma alteração nos pratos da balança a partir da situação apresentada na linha anterior de modo a manter o equilíbrio da balança.

Prepare uma tabela para cada fileira de alunos da classe. A tabela poderá ser do tipo:

Complete uma linha da tabela registrando uma alteração nos pratos da balança sem alterar o seu equilíbrio.				
Nome do aluno	Alterações	O que ficou no primeiro prato	O que ficou no segundo prato	Operações realizadas em cada prato.
- - - - - - - -	Situação dada	1.c + 2.e	4.e	
	1ª alteração			
	2ª alteração			
	3ª alteração			
	4ª alteração			
	5ª alteração			
	6ª alteração			
	7ª alteração			

A seguir informe aos alunos que o cubo pesa 40g e que a esfera pesa 20g. Peça então que cada aluno descubra o peso total que deveria ficar em cada um dos pratos da balança após a alteração sugerida por ele.

Os alunos deverão encontrar uma igualdade numérica. Por exemplo, se esse cálculo fosse feito para a situação dada, certamente o aluno faria, mesmo que mentalmente os seguintes cálculos:

$$1.c + 2.e = 40 + 2 \times 20 = 80 \quad (\text{1º prato})$$

$$4.e = 4 \times 20 = 80 \quad (\text{2º prato})$$

Verifique se todos os alunos encontraram uma igualdade numérica, caso isso não tenha acontecido, organize-os em grupos para que descubram o erro. Evidentemente os alunos deverão concluir que o equilíbrio da balança supõe uma igualdade de pesos em seus pratos.

PARTE 2: CONSTATAÇÕES.

MATERIAL NECESSÁRIO: Nenhum.

DESENVOLVIMENTO:

Coloque na lousa, novamente, a lista das possíveis alterações que podem ser feitas nos pratos de uma balança em equilíbrio de modo a não desequilibrá-la, ou seja:

- Dividir as quantidades de ambos os pratos da balança pelo mesmo número.
- Multiplicar as quantidades de ambos os pratos da balança pelo mesmo número.
- Somar ou subtrair os mesmos pesos em ambos os pratos da balança.

Peça aos alunos que verifiquem, em grupo, se esses princípios são verdadeiros também para as igualdades.

Para ajudá-los nessa pesquisa, sugira um roteiro do tipo:

1. Copie uma igualdade (por exemplo 80 = 80')

2. Escolha um número qualquer (diferente de 1) e multiplique os dois membros da igualdade por esse número. Escreva a sentença que você obteve.
3. Compare a igualdade inicial com a sentença obtida no item 2. O que elas têm em comum?
4. Sua conclusão seria a mesma se você multiplicasse apenas um dos membros da igualdade inicial pelo número escolhido? Por quê?
5. Verifique se suas conclusões estão corretas escrevendo outra igualdade e escolhendo um número qualquer (diferente de 1) para multiplicar os dois membros dessa igualdade.
6. Explique porque escolhemos, inicialmente, um número diferente de 1 para multiplicar os dois membros da igualdade.
7. Suas conclusões são válidas para a igualdade 0 = 0 ?

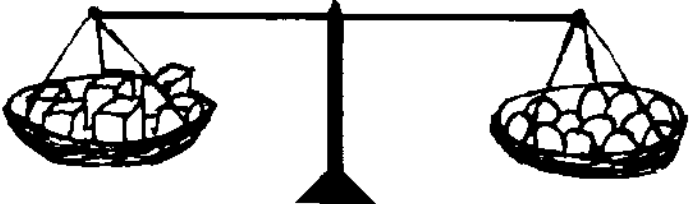
Peça aos grupos que faça roteiros como o apresentado para verificar se os outros princípios, constatados na balança são válidos para a igualdade.

Ao final do trabalho, os grupos deverão fazer uma apresentação de suas conclusões.

PARTE 3: PRINCÍPIO DA IGUALDADE.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha tipo II-1.

DESENVOLVIMENTO:

Os alunos poderão responder às questões da folha-tipo II-1 e II-1a em grupo. Terminada a tarefa, comente com eles as conclusões que chegaram e as respostas que deram a cada uma das questões, tire as dúvidas e a seguir, lance o desafio:

Aplique os princípios da igualdade nas sentenças abaixo de modo a obter, em cada caso, igualdade indicada.

a) $10 + 7 = 17$ $1 = 1$	b) $4 \times 8 = 32$ $1 = 1$
c) $8 + 7 - 10 = 5$ $0 = 0$	d) $10 \times 4 - 1 = 30$ $0 = 0$
e) $\frac{5}{2} + \frac{1}{3} = \frac{17}{6}$ $1 = 1$	f) $0{,}8 : 0{,}1 – 1{,}2 = 6{,}8$ $1 = 1$

FOLHA-TIPO I-1
BALANÇAS E IGUALDADES.

Complete as tabelas:

Aluno A

balança equilibrada

da seguinte maneira:

Aluno B	1º prato	2º prato	operação realizada em cada prato
situação dada	6.c	12.e	
1ª alteração	3.c	6.e	
2ª alteração	1.c	2.e	

Aluno C	1º prato	2º prato	operação realizada em cada prato
situação dada	1.c	2.e	
1ª alteração	1.c e 2.e	4.e	
2ª alteração	2.c e 2.e	1.c e 4.e	

Aluno D	1º prato	2º prato	operação realizada em cada prato
situação dada	2.c + 2.e	1.c + 4.e	
1ª alteração	4.c + 4.e	2.c + 8.e	
2ª alteração	2.c	4.e	

Aluno E	1º prato	2º prato	operação realizada em cada prato
situação dada	2.c	4.e	
1ª alteração	1.c	2.e	
2ª alteração	0.c	0.e	

FOLHA-TIPO II-1
PRINCÍPIOS DA IGUALDADE.

Observe a tabela:

1ª linha →	$5 = 5$	$5 + 3 = 5 + ______$	$8 = 8$
2ª linha →	$4 + 3 = 2 + 5$	$4 + 3 + ___ = 2 + 5 + ___$	______
3ª linha →	$\frac{5}{3} - \frac{2}{3} = \frac{3}{3}$	$\frac{5}{3} - \frac{2}{3} + ___ = \frac{3}{3} + ___$	______
4ª linha →	$0 = 6 - 6$	$0 + ___ = 6 - 6 + ___$	______
5ª linha →	$32 = 15 + 17$	$32 - 7 = 15 + 17 - ___$	______
6ª linha →	$16 + m = 10$	$___ + m - 1 = 10$	______
7ª linha →	$x + 5 = 16$	$x + 5 - 5 = 16$	______

1. Observe cada linha da primeira coluna. O que elas têm em comum?
2. Complete cada linha da segunda coluna de modo a obter uma nova igualdade.
3. Efetue as operações da 2ª coluna e coloque o resultado na 3ª coluna.
4. Na igualdade $0 = 0$ é necessário multiplicarmos, em ambos os membros, o <u>mesmo</u> número para que ela se mantenha? Por quê?
5. Converse com seus colegas a respeito desse exercício e veja que conclusões vocês podem tirar sobre uma igualdade.
6. Verifique se a conclusão que vocês chegaram pode ser traduzida da seguinte maneira:

> Quaisquer que sejam os números a, b e c,
> Se $a = b$, então $a + c = b + c$

FOLHA-TIPO III-1

PRINCÍPIO DA IGUALDADE.

Observe a tabela:

	1ª coluna	2ª coluna	3ª coluna
1ª linha →	8 = 8	8 x 2 = 8 x ___	16 = 16
2ª linha →	13 = 13	13 x (- 3) = ___ x (- 3)	
3ª linha →	28 = 28	28 x $\frac{1}{2}$ = 28 x ___	
4ª linha →	100 = 100	100 : 5 = 100 : ___	
5ª linha→	$\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$ x $\frac{4}{3}$ = ___ x $\frac{4}{3}$	
6ª linha →	0 = 0	0 x ___ = 0 x ___	
7ª linha →	181 = 181	181 : 181 = ___ : 181	
8ª linha →	2 x 8 = 8 x 2	2 x 8 x ___ = 2 x 8 ___	

1. Complete a 2ª coluna obtendo sentenças verdadeiras.
2. Efetue os cálculos da 2ª coluna e passe o resultado para a 3ª coluna.
3. Compare a 1ª com a 2ª. O que elas têm em comum? O que foi alterado? De que maneira foi alterado
4. Compare a 6ª linha com as demais. Você nota algo de especial nessa linha? Comente o que você observou.
5. Na igualdade 0 = 0 é necessário multiplicarmos, em ambos os membros, o mesmo número para que ela se mantenha? Por quê?
6. As observações feitas nas questões 4 e 5 valem apenas para a igualdade 0 = 0? Faça experiências com outras igualdades.
7. Compare suas respostas com as de seus colegas.
8. Verifique se a sua conclusão, ou a de um de seus colegas, pode ser traduzida da seguinte maneira;

> Quaisquer que sejam os números a, b e c temos, se a= b então a x c = b x c

ATIVIDADE 2: EQUAÇÕES.

OBJETIVOS: Introduzir o conceito de equação do 1º grau com uma incógnita.

Traduzir uma situação por meio de uma equação.

PARTE 1: ADIVINHAÇÕES.

MATERIAL NECESSÁRIO: Nenhum.

DESENVOLVIMENTO:

Faça uma brincadeira com os alunos: eles pensam um número e você adivinha o número pensado, a partir de algumas ordens.

Por exemplo, coloque na lousa uma tabela tipo:

Aluno	Pense um número	Some 1	Dobre o resultado	Tire 2	Resultado

Diga que, cada aluno, deve pensar o seu número e não dizer a ninguém, apenas registrá-lo em um pedaço de papel completando também as outras ordens de acordo com a tabela.

A seguir, chame um aluno na lousa. Peça para que ele coloque o seu nome na tabela e o resultado final. Por exemplo:

Aluno	Pense um número	Some 1	Dobre o resultado	Tire 2	Resultado
Lino					18

A partir desse resultado você terá condições de descobrir o número pensado. Uma das maneiras, é claro, será resolvendo a equação:

$$(x + 1). 2 – 2 = 18$$

Após várias tentativas, diga aos alunos que agora fará ao contrário: você pensa em um número, faz as mesmas operações indicadas na tabela e eles é que vão descobrir o número pensado.

É possível que o aluno ainda não saiba resolver equações sistematizadamente, nem mesmo sabe o que é uma equação. Levar a eles esses conhecimentos é o objetivo dessas atividades. No entanto, nesse primeiro momento, deixe que ele próprio tente descobrir um método para resolver o problema.

É possível que eles queiram percorrer o caminho inverso, por exemplo, se tiverem a informação:

Aluno	Pense um nº	Some 1	Dobre o resultado	Tire 2	Resultado
Prof.					6

Poderão completar a tabela da direita para a esquerda fazendo as seguintes deduções:

- Antes de tirar 2, o número era 6 + 2 = 8
- Antes de dobrar, o número era a metade de 8:

  $$8 : 2 = 4$$

- Antes de somar 1, o número era uma unidade a menos:

  $$4 – 1 = 3$$

- Logo o número pensado é 3.

Proponha outras situações mudando as indicações da tabela. Por exemplo:

Pense um nº	Divida o nº por 3	Some o dobro do nº	Some 1	Resultado

Pense um nº	Tire 4	Multiplique o resultado por 5	Tire 2	Resultado

PARTE 2: A LINGUAGEM DA ÁLGEBRA.

MATERIAL NECESSÁRIO: Nenhum.

DESENVOLVIMENTO:

Diga aos alunos que até agora usamos uma tabela para traduzir as operações realizadas com um número e chegar a um determinado resultado. No entanto, existe uma outra maneira, mais prática, para traduzir tais situações, essa outra maneira, é a utilização da linguagem da álgebra. Apresente um exemplo partindo da primeira tabela trabalhada na parte 1 desta atividade:

Pense um nº	Some 1	Dobre o resultado	Tire 2	Resultado

Após colocar a tabela na lousa, peça a um aluno que pense um número e que faça as operações indicadas na tabela mentalmente e, finalmente coloque o resultado. (Vamos supor que o aluno tenha apresentado o resultado 46).

Diga então que, como você ainda não sabe o número que foi pensado, vai chamá-lo de x (incógnita x). Coloque na tabela:

Pense um nº	Some 1	Dobre o resultado	Tire 2	Resultado
x				46

O significado do termo incógnita, poderá aqui ser desenvolvido. A partir da idéia que os alunos já trazem a esse respeito bem como, da atividade que estão desenvolvendo, poderão concluir que o termo incógnita significa uma grandeza por determinar, aquilo que é desconhecido e que se procura saber.

Discuta com os alunos como poderiam ser preenchidas as demais colunas da tabela.

Pense um nº	Some 1	Dobre o resultado	Tire 2	Resultado
x	X = 1	(x + 1) . 2	(x+1).2- 2	46

Após completar as colunas da tabela, possivelmente perceberão a igualdade:

$$(x + 1) \cdot 2 - 2 = 46$$

O aluno que pensou o número poderá fazer a verificação dessa igualdade substituindo a incógnita x pelo número que pensou.

$$(23 + 1) \times 2 - 2 = 46$$
$$24 \times 2 - 2 = 46$$
$$48 - 2 = 46$$
$$46 = 46$$

Informe outras tabelas para que os alunos façam uma tradução algébrica por meio de uma igualdade. Por exemplo:

Pense um nº	Some 5	Subtraia 7	Resultado
x			2

Pense um nº	Multiplique por 3	Tire 6	Resultado
x			24

Pense um nº	Subtraia 8	Multiplique o resultado por 2	Resultado
x			124

Pense um nº	Some o nº pensado com o seu triplo 5	Some 10	Resultado
x			74

Pense um nº	Tire do nº pensado a sua quarta parte	Subtraia 1	Resultado
y			2

Pense um nº	Divida o nº pensado por 7	Some o resultado com o nº 13	Resultado
n			124

PARTE 3: CLASSIFICAÇÕES.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo I-2.

DESENVOLVIMENTO:

Entregue uma folha-tipo I-2 para cada aluno. Peça que comparem os exemplos dados para cada um dos conceitos e que apontem semelhanças e diferenças entre eles.

A partir dessas comparações, convide-os a definirem usando as próprias palavras, os termos: expressão, expressão algébricas, sentenças e sentenças abertas.

Pergunte em qual das classificações acima se enquadraria a igualdade:

$$(x + 1) . 2 – 2 = 46 ?$$

Diga então que uma igualdade desse tipo também recebe o nome de EQUAÇÃO. Logo, equação é uma sentença aberta expressa por uma por uma igualdade.

Informe aos alunos que toda equação apresenta dois membros:

1º membro à esquerda do sinal de igualdade e

2º membro à direita do sinal de igualdade.

Por exemplo:

$$\underbrace{(x + 1) . 2 – 2}_{1^{o}\text{ membro}} \quad = \quad \underbrace{46}_{2^{o}\text{ membro}}$$

Informe ainda que o valor de x que transforma a sentença aberta em uma sentença verdadeira é chamada RAIZ DA EQUAÇÃO. Assim, no nosso exemplo:

$$(x + 1) . 2 – 2 = 46$$

a raiz, como já foi verificado, é o número 3.

Como exercício, peça aos alunos que associem cada equação abaixo com a sua raiz:

EQUAÇÃO	RAIZ
$x + 5 - 7 = 2$	16
$3 . x - 6 = 24$	100
$y + 3 . y + 10 = 74$	4
$w - \frac{w}{4} - 1 = 74$	10

PARTE 4: TRADUÇÕES.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo II-2.

DESENVOLVIMENTO:

Antes de entregar a folha-tipo II-2 para os alunos, coloque na lousa a seguinte situação:

> Joaninha gastou seu salário da seguinte maneira:
> - $\frac{1}{5}$ do salário ela comprou roupa
> - $\frac{1}{10}$ ela gastou com material escolar
> - R$ 500,00 ela reservou para as despesas do mês.
> - Com o restante ela comprou um presente de R$ 400 para seu irmãozinho.

Peça aos alunos que analisem a situação e que a traduzam por meio de uma equação. Havendo necessidade, mostre a eles a conveniência de representar o salário de Joaninha pela incógnita x. Coloque uma coluna ao lado das informações para que sejam feitas as traduções:

	TRADUÇÕES ALGÉBRICAS
- SALÁRIO DE JOANINHA	X
- $\frac{1}{5}$ Ela gastou comprando roupas	$\frac{1}{5} \cdot x$ ou $\frac{x}{5}$
- $\frac{1}{10}$ gastou com material escolar	$\frac{1}{10} \cdot x$ ou $\frac{x}{10}$
- R$ 500,00 reservou para despesas	500,00
- R$ 400,00 comprou presentes	400,00

Os próprios alunos poderão concluir a igualdade:

$$x = \frac{x}{5} + \frac{x}{10} + 500,00 + 400,00$$

Entregue a cada aluno uma folha-tipo II-2 e peça que em grupos analisem as situações nela apresentadas e que as traduzam por meio de uma equação.

Durante o trabalho, percorra os grupos, dando esclarecimentos e sugerindo procedimentos se houver necessidades.

Terminada a tarefa, convide os alunos para fazerem a correção na lousa.

FOLHA TIPO I-2

CLASSIFICAÇÃO.

Compare os exemplos dados em cada quadrinho:

Exemplos de expressões:

1) $3 + 5 \times 2$
2) $\left(\frac{2}{3} - 1\right) \times 3 \div 2$
3) $\frac{2}{3} \times \left(5 - \frac{8}{3}\right)^2 - 2^3$
4) $\frac{3.x}{2} + 8 - x$
5) $1 + 54 \div 17 - \frac{10}{2}$
6) $\frac{m^2}{3} + 2.m - 7$
7) $a^2 + 2.a.b + b^2$

Exemplos de expressão algébrica:

1) $\frac{3.x}{2} + 8 - x$
2) $\frac{m^2}{3} + 2.m - 7$
3) $a^2 + 2.a.b + b^2$
4) $(a - b)^2$
5) $\frac{x - 1}{3} - \frac{1}{2}$
6) $y + 3.y - \frac{y}{4}$
7) $x^2 + 2.x - 1$

Exemplos de sentença:

1) $3 + 5 . 2 = 13$
2) $\frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$
3) $7 + 8 < 20$
4) $x - 1 = 10$
5) $2.x^2 < 200$
6) $\frac{3}{4} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + 2^3 = 131$
7) $\frac{x - 1}{2} + \frac{x + 1}{3} = \frac{3}{4}$

Exemplos de sentença aberta:

1) $x - 1 = 10$
2) $2.x^2 < 200$
3) $\frac{x - 1}{2} + \frac{x + 1}{3} = \frac{3}{4}$
4) $\frac{3}{4} \cdot m^2 - m = 1$
5) $3.a + 2.b < c$
6) $2.y - 5 = y - 2$
7) $\frac{x - 1}{3} < 4$

FOLHA-TIPO II-2

TRADUÇÕES.

A. Escreva uma equação para cada situação:

1. Um número somado com duas unidades é igual a 18.
2. O dobro de um número menos 15 unidade é igual à metade desse número.
3. A terça parte de um número somado com o seu dobro menos a sua metade é igual a 11.
4. O dobro de um número somado com 3 é igual a 24.
5. A metade do comprimento da minha fita é igual a 12 cm.
6. A soma de três números inteiros consecutivos é 408.
7. Com $\frac{2}{9}$ do seu salário Rodolfo comprou uma bicicleta de R$ 130,00.
8. Em uma classe de 40 alunos o número de meninas é igual a $\frac{3}{5}$ do número de meninos.
9. Pedro, Paulo e Plínio vão repartir 100 selos de modo que Pedro receba 3 selos a mais que Paulo e Plínio receba selos a menos que Paulo.
10. Somando 20 kg à metade do peso de Jair, chegamos ao peso de Ana que é 60 kg.

B. Redija uma situação para cada uma das questões:

$2 . x – 3 = 8$	$x – 2 . x + 2 . x = 25$

ATIVIDADE 3: RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU COM UMA INCÓGNITA.

OBJETIVOS: Inferir e aplicar técnicas de resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita.
Resolver problemas que podem ser traduzidos por uma equação do 1º grau.

PARTE 1: EQUAÇÕES EQUIVALENTES.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo I-3.

DESENVOLVIMENTO:

Proponha aos alunos a resolução dos seguintes problemas:

1. Damião comprou mais 15 hectares de terra e assim, ficou com um total de 42 hectares. Quantos hectares tinha Damião antes dessa última compra?
2. Cada vez que Márcia vai à venda de seu tio, ela ganha 3 balas. Só esse mês ela já ganhou 81 balas. Quantas vezes Márcia foi à venda de seu tio esse mês?

Certamente os alunos não sentirão dificuldade para resolver os dois problemas e, verificarão que nos dois casos a resposta tem o número 27. Peça-lhes então que traduzam cada uma das situações por meio de uma equação.

Provavelmente aparecerão as seguintes equações:

1) $x + 15 = 42$ e 2) $3 . x = 81$

Comente as equações apresentadas e verifique se sabem o que significa a letra em cada uma das equações e que o número 27 é a raiz para as duas equações.

Peça que façam a verificação nos dois casos:

$x + 15 = 42$	$3 . x = 81$
$27 + 15 = 42$	$3 . 27 = 81$
$42 = 42$	$81 = 81$

Informe-os que quando duas equações ou mais, apresentam a mesma raiz, são chamadas EQUAÇÕES EQUIVALENTES, mesmo que as situações que a originaram sejam completamente diferente.

Apresente a seguir a equação: $3 . x + 4 = 2 . x + 8$.

Peça que verifiquem se o número 4 é raiz dessa equação.

Ao fazerem a verificação os alunos concluirão que sim:

$$3 . x + 4 = 2 . x + 8$$
$$3 . 4 + 4 = 2 . 4 + 8$$
$$12 + 4 = 8 + 8$$
$$16 = 16$$

Diga-lhes que você vai fazer algumas transformações nessa equação aplicando propriedades que eles já conhecem. Faça na lousa, por exemplo:

$$3 \cdot x + 4 = 2 \cdot x + 8$$

$$3 \cdot x + 4 - 4 = 2 \cdot x + 8 - 4$$

$$3 \cdot x = 2 \cdot x + 4$$

Comente que subtraindo o número 4 de ambos os membros da equação você obteve uma outra equação.

$$3 \cdot x = 2 \cdot x + 4$$

Peça que façam a verificação para saber se essa equação, assim obtida, é equivalente à equação inicial.

Finalmente, entregue a cada aluno uma folha-tipo I-3 e peça que completem as tabelas de acordo com as indicações.

Isto feito, peça que se reúnam em grupos para compararem as respostas e fazerem correções. Faça a seguir, junto com os alunos, um levantamento das propriedades aplicadas, relacionando-as na lousa.

Identifique os alunos que aplicaram, ainda que uma única vez, determinada propriedade e chame a atenção para o fato de que em todas as situações, obtiveram equações equivalentes.

Após os alunos estarem convencidos que podem aplicar propriedades da igualdade e das operações sem alterar a raiz da equação, passe para a segunda parte da atividade.

PARTE 2: APLICANDO PROPRIEDADE DA IGUALDADE.

MATERIAL NECESSÁRIO: Nenhum.

DESENVOLVIMENTO:

Peça aos alunos que apliquem as propriedades da igualdade em equação como:

1) $x + 10 = 25$ 2) $15 . x = 30$

É possível que alguns alunos apresentem respostas do tipo:

1) $x + 10 = 25$

$x + 10 - 3 = 25 - 3$

$x + 7 = 22$

2) $15 . x = 30$

$15 . x + 2 = 30 + 2$

$15 . x + 2 = 32$

ou ainda:

$15 . x = 30$

$15 . x : 3 = 30 : 3$

$5 . x = 10.$

Nestes casos, pode-se dizer que responderam corretamente à questão proposta, pois aplicaram as propriedades solicitadas.

No entanto o momento é indicado para uma discussão à respeito da utilidade da aplicação das propriedades da igualdade na resolução de uma equação.

Na equação $x + 10 = 25$, por exemplo, é conveniente subtrairmos o número 10 nos dois membros da equação pois, dessa forma obteremos o valor de x que torna a igualdade verdadeira:

$$x + 10 = 25$$
$$x + 10 - 10 = 25 - 10$$
$$x + 0 = 15$$
$$x = 15$$

VERIFICAÇÃO:

$$x + 10 = 25$$
$$15 + 10 = 25$$
$$25 = 25$$

Pelo mesmo motivo, é conveniente dividirmos os dois membros da equação:

$$15 \cdot x = 30$$

por 15, ou multiplicarmos por $\frac{1}{15}$:

$$15 \cdot x = 30$$
$$15 \cdot x : 15 = 30 : 15$$
$$x = 2$$

ou

$$15 \cdot x = 30$$
$$15 \cdot x \cdot \frac{1}{15} = 30 \cdot \frac{1}{15}$$
$$x = \frac{30}{15}$$
$$x = 2$$

VERIFICAÇÃO:

$$15 \cdot x = 30$$
$$15 \cdot 2 = 30$$
$$30 = 30.$$

É importante que nesta fase da aprendizagem, o aluno resolva as equações aplicando e indicando as propriedades da igualdade, até mesmo em equações que apresentam maior grau de dificuldade como:

$$\frac{3. x - 7}{4} - \frac{x + 5}{12} = -2$$
$$12 \cdot \left(\frac{3. x - 7}{4} - \frac{x + 5}{12} \right) = 12.(-2)$$

$$12 \cdot \frac{3 \cdot x - 7}{4} - 12 \cdot \frac{x + 5}{12} = 12 \cdot (-2)$$

$$3 \cdot (3 \cdot x - 7) - (x + 5) = -24$$

$$9 \cdot x - 21 - x - 5 = -24$$

$$8 \cdot x - 26 = -24$$

$$8 \cdot x - 26 + 26 = -24 + 26$$

$$8 \cdot x = 2$$

$$\frac{1}{8} \cdot 8 \cdot x = \frac{1}{8} \cdot 2$$

$$x = \frac{2}{8} \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{4} \quad \text{ou} \quad x = 0{,}25.$$

PARTE 3: VOLTANDO AS TRADUÇÕES.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo II-2.

DESENVOLVIMENTO:

Peça aos alunos que retomem a FOLHA-TIPO II-2 da atividade nº 2. Diga a eles que observem as equações que usaram para traduzir cada uma das situações e lembre-os que no momento em que fizeram as traduções das situações, eles ainda não haviam feito esse estudo de resolução de equações. Agora, eles poderão resolver as equações aplicando as propriedades da igualdade e em seguida discutir os resultados com os colegas.

Realizada a tarefa, comente com eles os valores que encontraram para a incógnita de cada uma das equações. Levante questões como:

. O que significa o resultado da equação que traduziu a primeira situação? E a segunda? Etc.

- Você concorda que em cada uma dessas situações poderia ser acrescentada uma pergunta para que ela se transforme em uma situação problema?
- Que pergunta você acrescentaria na 1ª situação? E na 2ª? Etc.
- O que significa o valor da letra x nas situações que você inventou?
- Esses problemas poderiam ser resolvidos sem usarmos uma equação?
- De que maneira você resolveria o primeiro problema, sem usar uma equação? E o segundo? Etc.
- Em cada caso, diga qual foi a maneira mais prática de resolver o problema.

Ao discutir a última questão, é importante que os alunos façam observações a respeito das vantagens e desvantagens de se usar uma equação em diferentes tipos de situações. Eles poderão dizer, por exemplo, que a primeira situação pode ser resolvida mentalmente e que portanto não há necessidade de equação. Que a 7ª situação ele resolve com mais facilidade usando apenas os cálculos da aritmética e assim por diante.

PARTE 4: USANDO A IMAGINAÇÃO.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo II-3.

DESENVOLVIMENTO:

Entregue a cada aluno uma folha-tipo II-3 e diga que na primeira coluna da folha, estão algumas equações resolvidas pelo aluno Plínio e na segunda coluna estão as mesmas equações resolvidas pela aluna Diana. Esclareça que Diana usou os mesmos procedimentos que Plínio, só que, com a prática, ela consegue fazer algumas passagens mentalmente.

Peça então que comparem o trabalho dos dois alunos (Plínio e Diana) e expliquem em cada caso, o que foi feito.

Convide-os a apresentarem suas conclusões.

A seguir, entregue a folha-tipo II-3a e peça que resolvam as equações nela apresentadas da seguinte maneira: na coluna A devem utilizar os procedimentos que já conhecem e na coluna B devem usar a imaginação como fez Diana.

Terminada a tarefa, comente a resolução de cada uma das equações.

Quanto as equações 11 e 13, são casos de indeterminação. Faça o estudo desses casos juntos aos alunos levando-os a perceber que se, ao final das reduções feitas com uma equação obtiveram o coeficiente zero para o produto, estarão frente a um caso de indeterminação da raiz, já que, para qualquer valor atribuído à variável, a sentença será verdadeira.

$$0 . x = 0$$

Comente também os casos das equações 10 e 12 por se tratarem de equações impossíveis, pois qualquer que seja o valor atribuído à variável x, a sentença será falsa.

FOLHA-TIPO I-3

EQUAÇÕES EQUIVALENTES.

A partir da equação dada em cada quadro, faça duas alterações sucessivas aplicando uma das propriedades que você já conhece (propriedade da igualdade ou das operações). A seguir verifique se a equação que você obteve em cada caso é equivalente ou não á equação dada:

		Raiz
Equação dada	$2 . x + 4 . x - 1 = 41$	7
1ª alteração		
2ª alteração		

		Raiz
Equação dada	$5 . y + 3 = 2 . y + 18$	5
1ª alteração		
2ª alteração		

		Raiz
Equação dada	$Y + 2 . y - 4 = 0$	$\frac{4}{3}$
1ª alteração		
2ª alteração		

		Raiz
Equação dada	$14 . m - 7 . m = 21$	3
1ª alteração		
2ª alteração		

FOLHA-TIPO II-3

USANDO A IMAGINAÇÃO.

<table>
<tr><th>Plínio (aluno da 7ª série)</th><th>Diana (aluno da 8ª série)</th></tr>
<tr><td>1) $20 + 2 . x = 136$
$20 + 2 . x - 20 = 136 - 20$
$2 . x = 116$
$2 . x : 2 = 116 : 2$
$x = 58$</td><td>1) $20 + 2 . x = 136$
$2 . x = 136 - 20$
$2 . x = 116$
$x = 116 : 2$
$x = 58$</td></tr>
<tr><td>2) $4 . x = \frac{x}{2} + 17$
$2 . 4 . x = 2 . \frac{x}{2} + 2 . 17$
$8 . x = x + 34$
$8 . x - x = x + 34 - x$
$7 . x = 34$
$7 . x . \frac{1}{7} = 34 . \frac{1}{7}$
$x = \frac{34}{7}$</td><td>2) $4 . x = \frac{x}{2} + 17$
$8 . x = x + 34$
$8 . x - x = 34$
$7 . x = 34$
$x = \frac{34}{7}$</td></tr>
<tr><td>3) $y + 2 . y + 1 = 3 . y + 5 + 3 . y$
$3 . y + 1 = 6 . y + 5$
$3 . y + 1 - 1 = 6 . y + 5 - 1$
$3 . y = 6 . y + 4$
$3 . y - 6 . y = 6 . y + 4 - 6 . y$
$- 3 . y = 4$
$(- 1) . (- 3 . y) = (- 1) . (4)$
$3 . y = - 4$
$3 . y . \frac{1}{3} = - 4 . \frac{1}{3}$
$y = - \frac{4}{3} = 1,3 = 1,333\ldots$</td><td>3) $y + 2 . y + 1 = 3 . y + 5 + 3 . y$
$3 . y + 1 = 6 . y + 5$
$3 . y - 6 . y = 5 - 1$
$- 3 . y = 4$
$3 . y = - 4$
$y = - \frac{4}{3}$</td></tr>
</table>

FOLHA-TIPO II – 3a

COLUNA A	COLUNA B
1) $5 + 2 \cdot x = 1$	1) $5 + 2 \cdot x = 1$
2) $-4 = 2 - 3 \cdot x$	2) $-4 = 2 - 3 \cdot x$
3) $4 \cdot x = x - 15$	3) $4 \cdot x = x - 15$
4) $7 \cdot x + 1 = 5 \cdot x - 7$	4) $7 \cdot x + 1 = 5 \cdot x - 7$
5) $x + \frac{x}{3} = 2$	5) $x + \frac{x}{3} = 2$
6) $3 \cdot (x + 1) + 2 = 5 - 2 \cdot (x - 1)$	6) $3 \cdot (x + 1) + 2 = 5 - 2 \cdot (x - 1)$
7) $\frac{y}{3} - 1 = 2 - \frac{y}{3}$	7) $\frac{y}{3} - 1 = 2 - \frac{y}{3}$
8) $\frac{m - 1}{2} = \frac{m + 1}{3}$	8) $\frac{m - 1}{2} = \frac{m + 1}{3}$
9) $\frac{x - 1}{2} + \frac{x + 1}{3} = \frac{2 \cdot x + 3}{5}$	9) $\frac{x - 1}{2} + \frac{x + 1}{3} = \frac{2 \cdot x + 3}{5}$
10) $x + 3 = x + 4$	10) $x + 3 = x + 4$
11) $3 \cdot (x + 2) - 2 \cdot (x + 4) + x = -2$	11) $3 \cdot (x + 2) - 2 \cdot (x + 4) + x = -2$
12) $\frac{2 \cdot w - 1}{2} = \frac{3 \cdot w - 2}{3}$	12) $\frac{2 \cdot w - 1}{2} = \frac{3 \cdot w - 2}{3}$
13) $2 \cdot x - 1 = -(1 - 2 \cdot x)$	13) $2 \cdot x - 1 = -(1 - 2 \cdot x)$

ATIVIDADE 4: DIAGONAIS DE UM POLÍGONO.

OBJETIVOS: Desenvolver o conceito de diagonal de um polígono.
Observar e analisar as propriedades das diagonais dos quadriláteros.
Determinar o número de diagonais de um polígono.

PARTE 1: A DIAGONAL.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo I-4.

DESENVOLVIMENTO:

Pergunte aos alunos se eles conhecem a palavra DIAGONAL e em que contexto ela pode ser utilizada. Se achar necessário pode até sugerir o levantamento do seu significado em um dicionário da língua portuguesa.

Num primeiro momento, a discussão sobre significados da palavra auxilia na conceituação de diagonal, uma vez que os usos correntes da palavra contêm o sentido matemático da mesma, por exemplo:

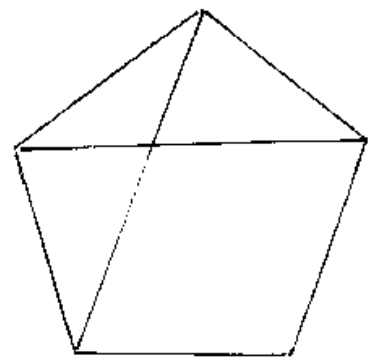
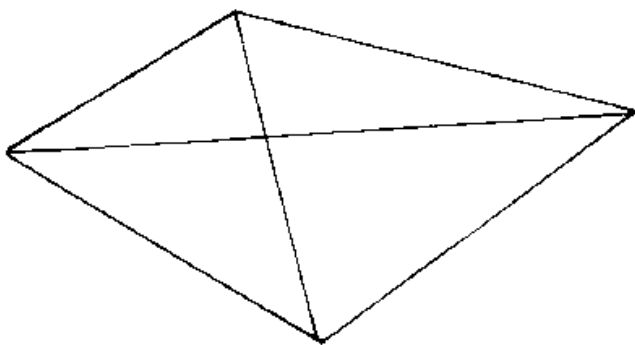
“ Fiz uma leitura em diagonal do texto.”

“O carro atravessou a rua numa diagonal.”

No dicionário do Aurélio diagonal é:

1. Oblíquo.
2. Diz-se a fazenda sulcada em sentido diferente do longitudinal ou do transversal da peça.
3. Direção oblíqua, indireta.

4. Num polígono, segmento que une um vértice a outro não consecutivo.

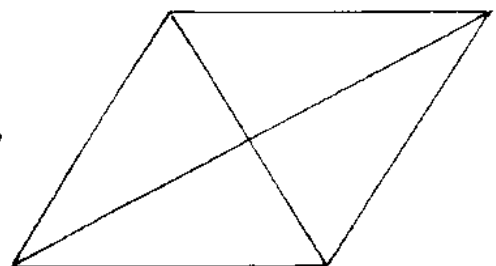
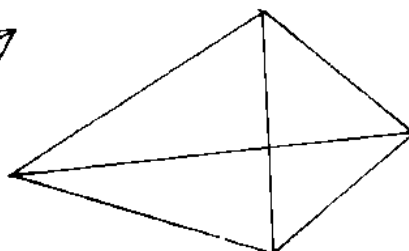
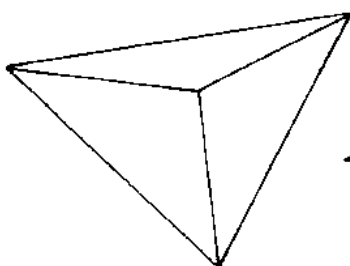
Todos eles sugerem a mesma idéia. Tomando o último significado como referência entregue a cada grupo de 4 alunos uma folha-tipo I-4, com diferentes polígonos, e solicite que tracem algumas das suas diagonais. Após um tempo para esse trabalho represente algumas delas na lousa, por exemplo:

Cabe discutir o que observaram ao tentarem traçar as diagonais dos polígonos, a partir de questões:

Qual o menor número de diagonais de um polígono?

Quantas diagonais têm o triângulo?

Você acha que é possível determinar o número de diagonais de qualquer polígono?

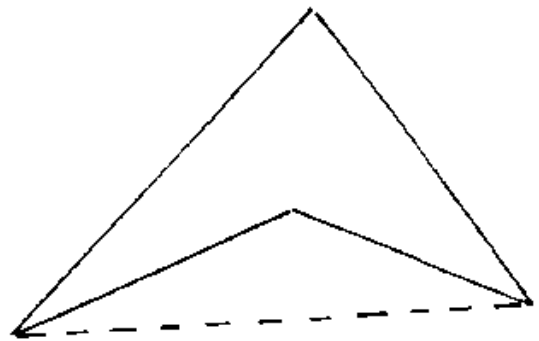
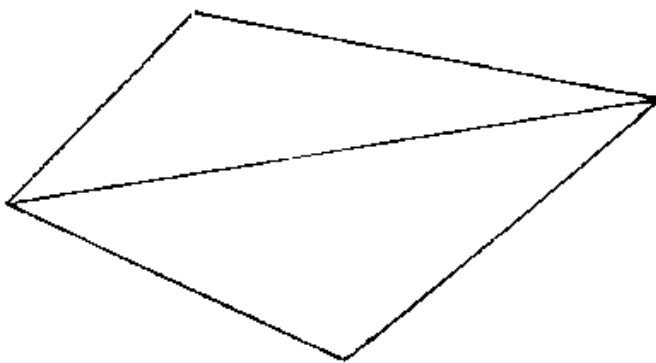
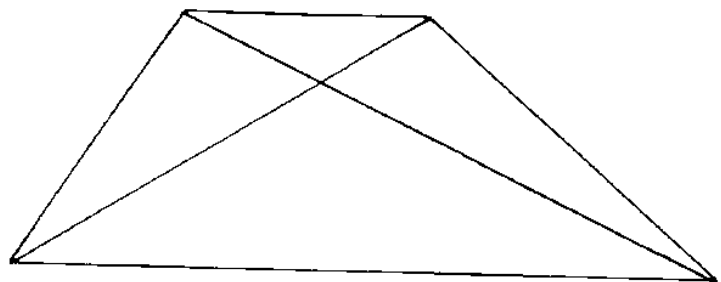
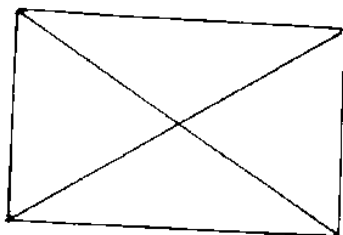
Em um quadrilátero quantas diagonais aparecem?

Peça para destacarem as figuras abaixo, analisarem suas características e o que ocorre com suas diagonais.

COMENTÁRIOS:

Destaque o fato de que há polígonos convexos e não convexos, explicitando as diferenças entre eles, embora já tenham tido oportunidade de identificá-los em outra atividade.

No caso dos triângulos não há diagonal, uma vez que os vértices são consecutivos dois a dois.

No caso dos quadriláteros:

- Todo quadrilátero tem duas diagonais.
- Nos quadriláteros, uma diagonal determina sempre dois triângulos:

- Nos quadriláteros convexos as diagonais necessariamente se interceptam:

PARTE 2: AS DIAGONAIS DE UM QUADRILÁTERO.

MATERIAL NECESSÁRIO: Varetas de madeira ou canudos de refrigerante em dois tamanhos (18 grandes e 6 pequenos), linha.

DESENVOLVIMENTO:

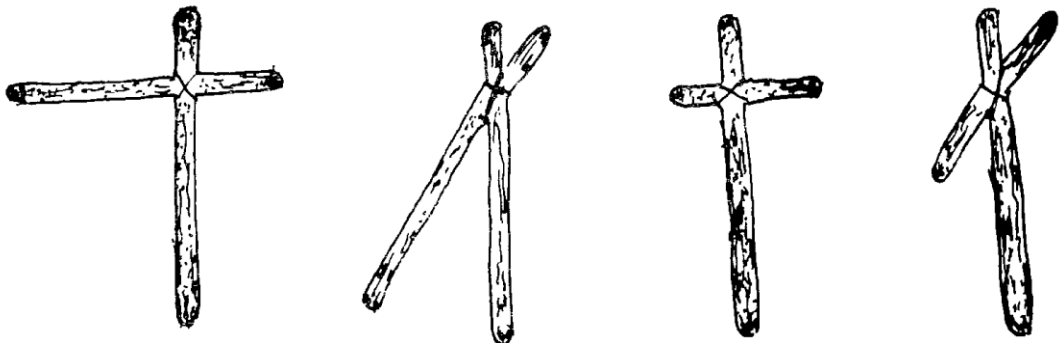
Tendo observado que:

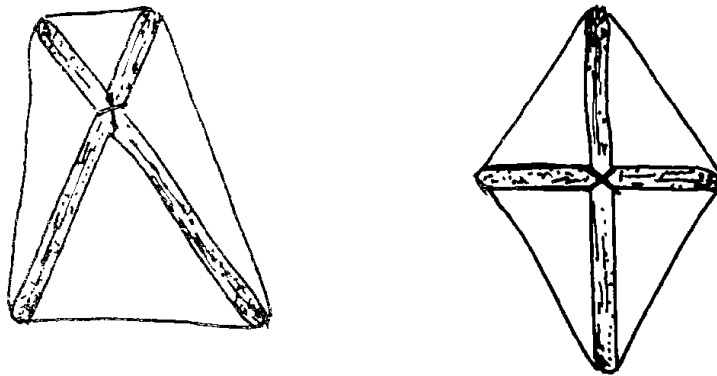
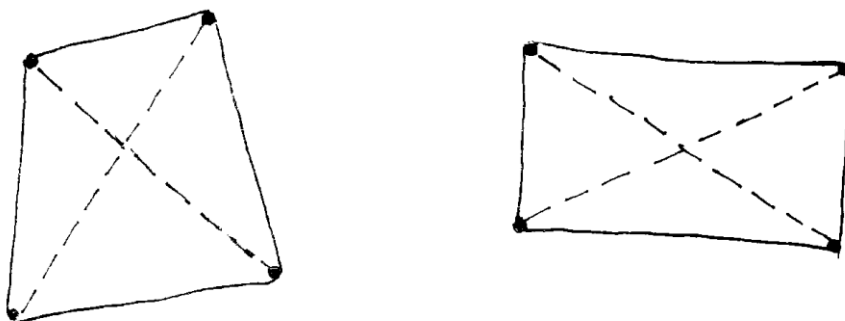
- As diagonais dos quadriláteros são duas, cada uma divide a figura em dois triângulos.

- Elas se cruzam se o quadrilátero for convexo.

Passaremos a examinar outras propriedades dos quadriláteros convexos a partir das suas diagonais.

Entregue a cada grupo de quatro alunos (ou peça para providenciarem em casa) 18 varetas de madeira (ou canudinho) de um mesmo tamanho e 6 menores. Solicite que amarrem, duas a duas, combinando duas grandes ou uma grande e um pequena da seguinte forma:

Fora do ponto médio das duas:

Após prender os palitos nas posições indicadas, sugira que formem quadriláteros usando um dos dois processos:

1. Passar uma linha pelas extremidades das varetas, por exemplo:

2. Marcar numa folha de papel os pontos relativos às extremidades das varetas e em seguida desenhar o quadrilátero correspondente e as respectivas diagonais:

Proponha aos alunos que analisem cada uma das figuras obtidas e tendo como referencia as propriedades (paralelismo dos lados,

medidas dos ângulos de um quadrilátero) e a condição adotada para fixar as varetas, respondam a pergunta do tipo:

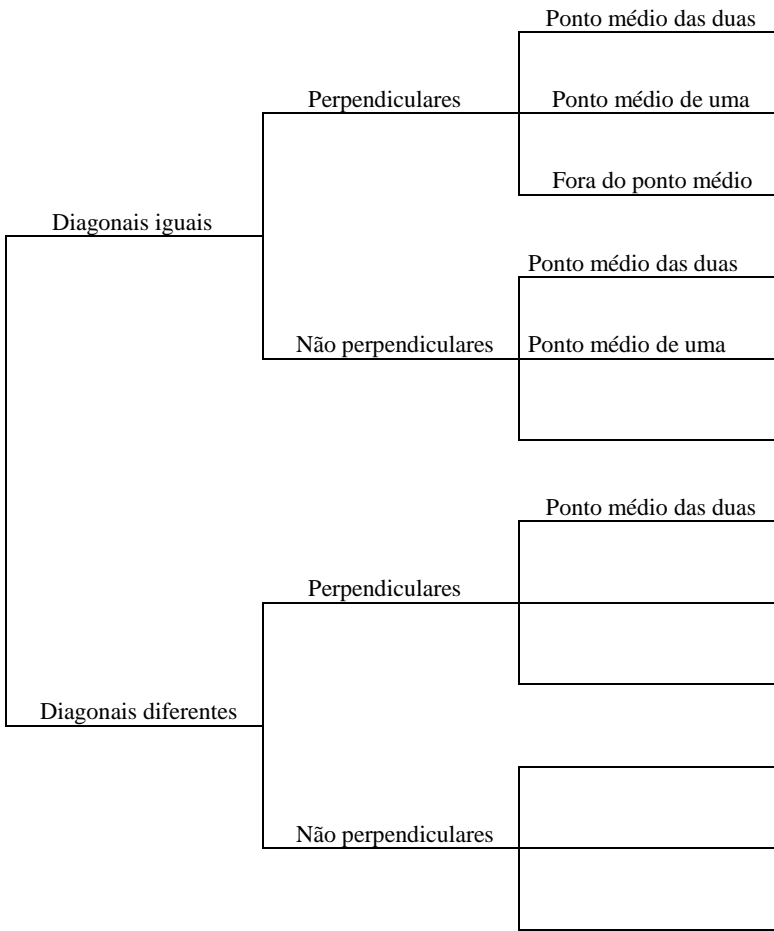
- Que tipos de quadriláteros obtiveram?
- Quando se obtém um quadrado? Um paralelogramo? Um trapézio? Um trapezóide isóscele? Etc.

Coloque na lousa uma tabela e peça que façam o mesmo no seu caderno para preencherem-na com os nomes dos quadriláteros, fazendo uma primeira sistematização:

	Diagonais iguais	Diagonais diferentes
Perpendiculares		
Não Perpendiculares		

Com certeza, aparecerão figuras do mesmo tipo em diferentes quadros, no entanto, servirão para evidenciar propriedades dessas figuras, possibilitando sistematização mais detalhadas, por exemplo:

		Diagonais iguais	Diagonais diferentes
Perpendiculares	Ponto médio duas		
	Ponto médio uma		
	Fora Ponto médio		
	Ponto médio duas		
Não Perpendiculares	Ponto médio uma		
	Fora Ponto médio		

De outro modo, você pode propor além dessa tabela mais detalhada que organizem os resultados das suas observações, numa árvore de possibilidades:

COMENTÁRIOS:

Verifique se os alunos obtiveram todos os tipos de quadriláteros convexos:

Paralelogramos.

Trapézios:

Isósceles, retângulos, escaleno.

Trapezóides:

Isósceles ou não.

Verifique também sua disposição na tabela ou na árvore:

		Diagonais iguais	Diagonais diferentes
Perpendiculares	Ponto médio duas	quadrado	losango
	Ponto médio uma	trapezóide isósceles.	trapezóide isósceles
	Fora Ponto médio	trapezóides	trapézios, trapezóides
Não Perpendiculares	Ponto médio duas	retângulo	paralelogramo
	Ponto médio uma	trapezóides	trapezóide
	Fora Ponto médio	trapezóides	trapézios, trapezóides

PARTE 3: QUANTAS DIAGONAIS TÊM UM POLÍGONO?

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha tipo I-4.

DESENVOLVIMENTO:

Desenvolva este trabalho primeiramente com polígonos convexos, regulares ou não e posteriormente proponha a verificação para outros tipos de polígonos.

Solicite aos alunos, organizados em grupo de 4, que inicialmente tentem achar a quantidade de diagonais dos polígonos convexos da folha-tipo I-4. Dê um tempo para a discussão em cada grupo e depois disso, compare os resultados encontrados.

Pergunte:

- Que método usaram para determiná-las?
- O que observaram ao traçarem as diagonais dos polígonos?

- É possível chegar numa lei geral para determinar o número de diagonais de um polígono?

Verifique se observam que ao traçarem as diagonais a partir de um vértice, em dado momento elas começam a se repetir porque já foram desenhadas a partir de outro vértice.

Proponha agora um método organizado, caso não tenham deduzido, solicitando que desenhem diferentes polígonos convexos, com número de lados n > 3:

Peça a eles que desenhem todas as diagonais a partir de um vértice.

Pergunte:

Quantas são as diagonais que partem de um vértice do pentágono?

No caso do pentágono o número de diagonais é o número de vértices multiplicado pelo número de diagonais que partem de cada um dos vértices? Por quê?

No caso do quadrilátero ele tem 4 diagonais?

Peça então para indicarem o número de lados e o número de diagonais que partem de um vértice nos seguintes casos:

	Nº de lados	Nº de diagonais em um vértice
Quadrilátero		
Pentágono		
Hexágono		
Heptágono		
Octógono		

Pergunte se o número de lados do polígono fosse n qual seria o número de diagonais que “saem” de um vértice?

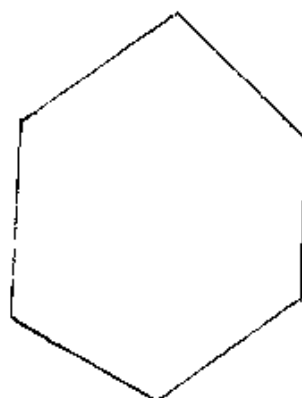
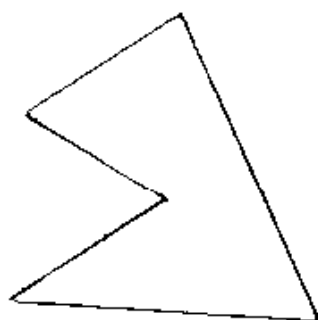
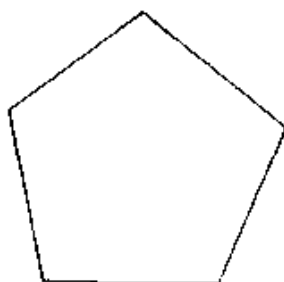
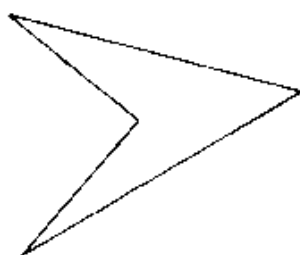
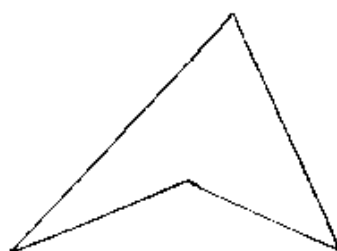
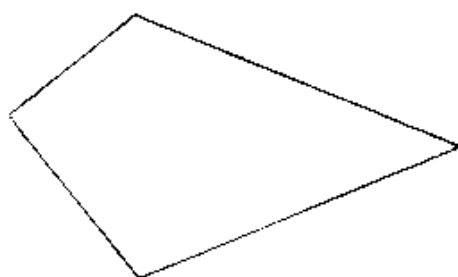
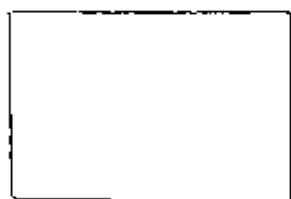
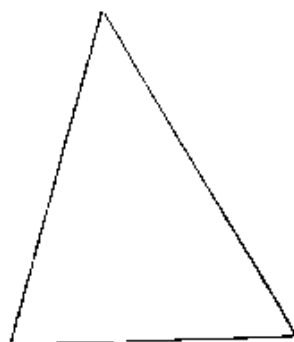
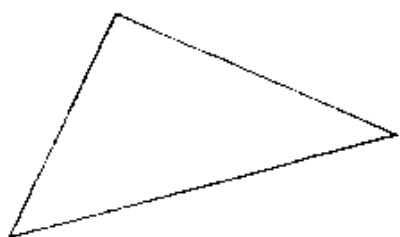
Verifique se eles perceberam que esse número é $n - 3$. E que ao traçarmos as diagonais de cada vértice, cada diagonal é computada duas vezes. Peça para eles escreverem uma expressão geral para determinar o número de diagonais de um polígono, após a discussão indique:

Nº de diagonais = $n \cdot (n - 3) : 2$

COMENTÁRIOS:

Conhecida essa expressão, proponha exercícios em que os alunos determinem o número de diagonais de um polígono regular ou não, conhecido o número de lados. Outro tipo de problema é calcular o número de lados, conhecidos o número de diagonais. Nesse último caso será necessário resolver através de equação do 2º grau, por isso pode ser proposto na 8ª série, como problema do 2º grau.

Peça agora que eles verifiquem a validade dessa expressão para polígonos não convexos.

FOLHA-TIPO I-4

ATIVIDADE 5: ÁREAS E PERÍMETROS DOS POLÍGONOS.

OBJETIVOS: Ampliar o estudo de área de triângulos e quadriláteros.
Calcular áreas de polígonos regulares e do círculo.
Calcular perímetros e áreas de figuras em situações problema.

PARTE 1: TRIÂNGULOS E QUADRILÁTEROS.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo I-5.

DESENVOLVIMENTO:

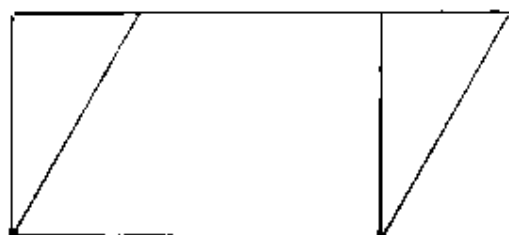
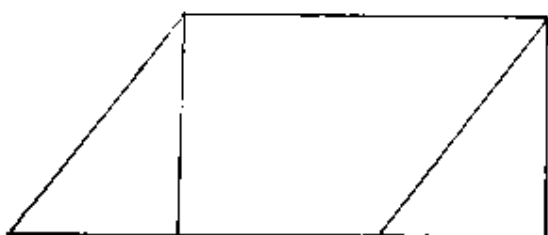
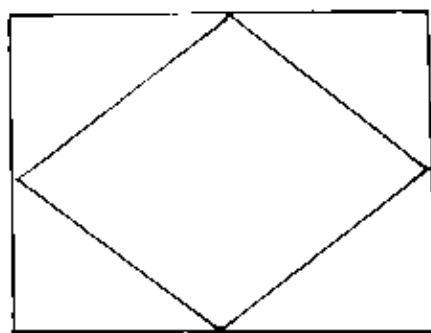
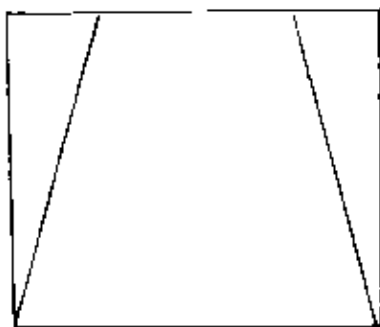
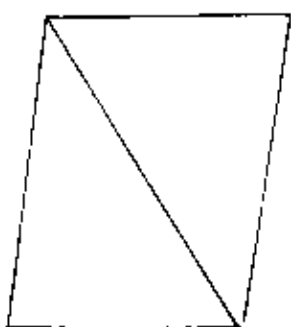
Entregue a cada aluno uma folha-tipo I-5 para discutir com o seu grupo formado de até 5 alunos, as questões formuladas. Dê um tempo para eles responderem as questões e fazerem os cálculos necessários para achar a área das figuras desenhadas tomando como unidade o quadradinho do papel quadriculado.

Lembre-os que esse trabalho já foi feito em outras atividades, no entanto, aqui, eles terão o objetivo de chegar ao cálculo da área, atentando para o modo como vão fazê-lo e anotando no seu caderno as etapas desse processo.

Verifique se o procedimento adotado inclui a contagem dos quadradinhos ou se já dispõem de um recurso mais geral para o cálculo da área de cada uma das figuras. É necessário então que cada grupo descreva o caminho adotado para ser discutido e de modo que uma síntese possa ser feita.

Veja se identificam as dimensões base e altura, ou se preferir, largura e comprimento e a área como os elementos comuns a cada tipo de figura.

Caso não seja imediata a conclusão e tenham algum tipo de dificuldade recomende que:

. No caso dos paralelogramos, desenhem um retângulo sobre cada um deles, ajustando a medida das duas figuras e observem o que ocorre.

. No caso dos triângulos, trapézios e losangos, tentem ajustá-los da mesma forma, tentem inscrevê-los num paralelogramo, façam recortes e observem o que ocorre.

COMENTÁRIOS:

O objetivo desta parte é retomar a noção de área de um triângulo ou quadrilátero associada à área de um triângulo.

PARTE 2: DESCOBRINDO UMA FÓRMULA.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha–tipo II – 5 e cartolina.

DESENVOLVIMENTO:

Entregue uma folha-tipo II-5 para cada grupo e solicite aos alunos que observem a figura escurecida e compare sua área com a área do paralelogramo que a contém. Além disso, tendo como base as unidades de comprimento e a área sugeridas pelo papel quadriculado, destacarão as dimensões de cada uma delas que sejam importantes na determinação de sua área.

Por exemplo, no caso do retângulo e do paralelogramo:

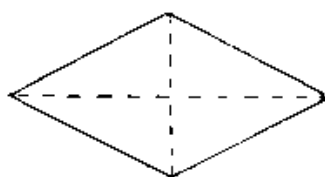
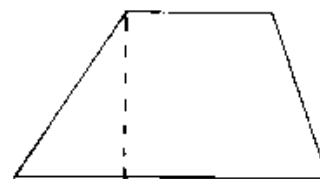
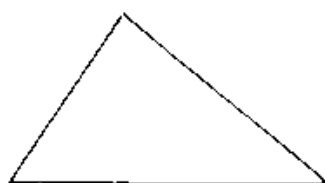
Altura = 3 e largura = 4 (ou base)

3 x 4 = 12 3 x 4 = 12

Verifique se os alunos percebem que os demais paralelogramos têm base e altura definidas pelas dimensões do triângulo, do trapézio e do losango.

Peça para os alunos completarem:

	Dimensões	
Paralelogramo	Base = ... altura = ...	Área
Triângulo		
Trapézio		

Solicite agora que desenhem as figuras indicadas abaixo, numa folha de cartolina, onde as letras representam suas dimensões. Para tanto, cada grupo pode usar compasso e esquadro. Se for necessário, desenharão mais uma figura de mesmo tipo, para compor o paralelogramo auxiliar.

Peça aos alunos que escrevam as expressões para o cálculo das áreas do triângulo, trapézio e losango em função das letras que indicam as dimensões das figuras.

Verifique se as expressões indicadas pelos grupos são:

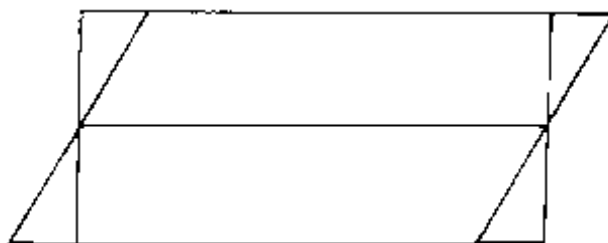
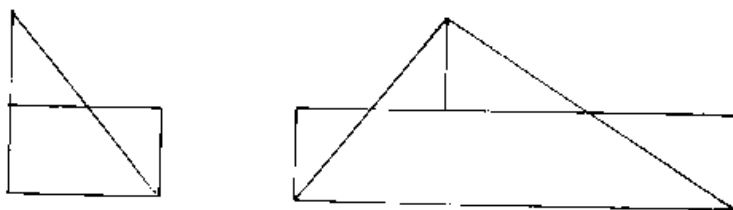
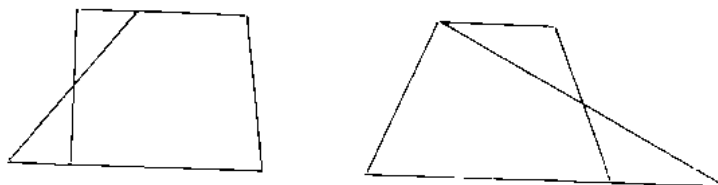
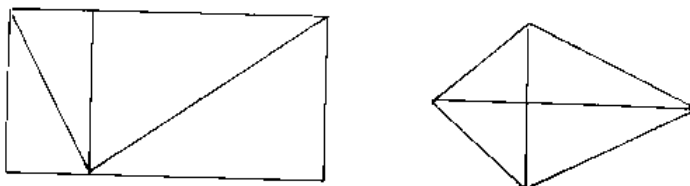
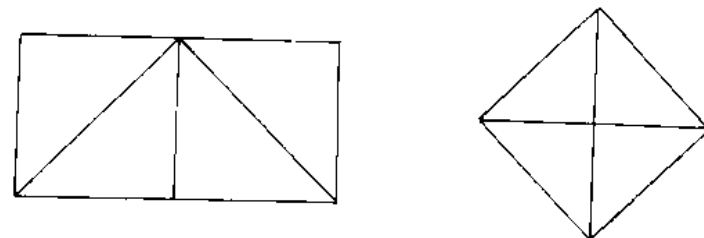
Paralelogramo	A = b x a
Triângulo	A = b x a : 2
Trapézio	A = (B + b). h : 2
Losango	A = D x d : 2

COMENTÁRIOS:

O cálculo das áreas das figuras em geral é feito através da transformação de uma figura em uma outra de mesma área (equivalente), através da composição e decomposição.

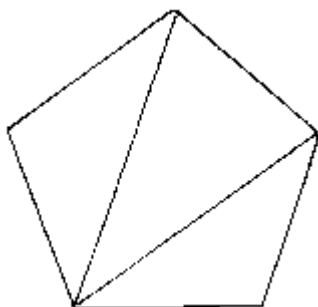
Há várias transformações que uma figura pode sofrer, para transformar-se em outra equivalente possibilitando a comparação das suas áreas e facilitando seu cálculo.

Alguns casos, como os que se seguem, são exemplos de situações em que as áreas das figuras sombreadas podem ser determinadas, tanto experimentalmente, recortando ou superpondo as figuras no papel quadriculado e em cartolina, como dedutivamente, com base em axiomas e propriedades das congruências, semelhanças, paralelismo, etc. Escolha algumas das situações que se seguem para trabalhar com os alunos:

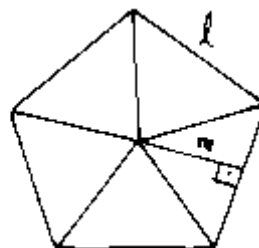
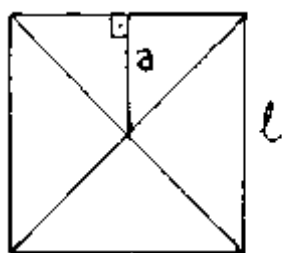
Paralelogramo

Triângulos

Trapézios

Losangos

Trapezóides

PARTE 3: A ÁREA DE UM POLÍGONO REGULAR.

MATERIAL NECESSÁRIO: Nenhum.

DESENVOLVIMENTO:

Discuta com os alunos o fato de se poder calcular a área de uma figura através da decomposição em outras. Assim, a área de um polígono qualquer pode ser determinada pela soma das partes em que foi decomposto:

Solicite aos grupos que desenhem polígonos regulares em circunferências de mesmo raio r e que discutam um meio de se calcular a área de cada um deles.

Após a discussão, recomende a decomposição dos polígonos em triângulos isósceles, com um dos vértices no centro da circunferência.

Por exemplo:

Peça para identificarem a altura e os lados dos triângulos isósceles em cada polígono regular.

Pergunte como podemos calcular a área de cada polígono regular ?

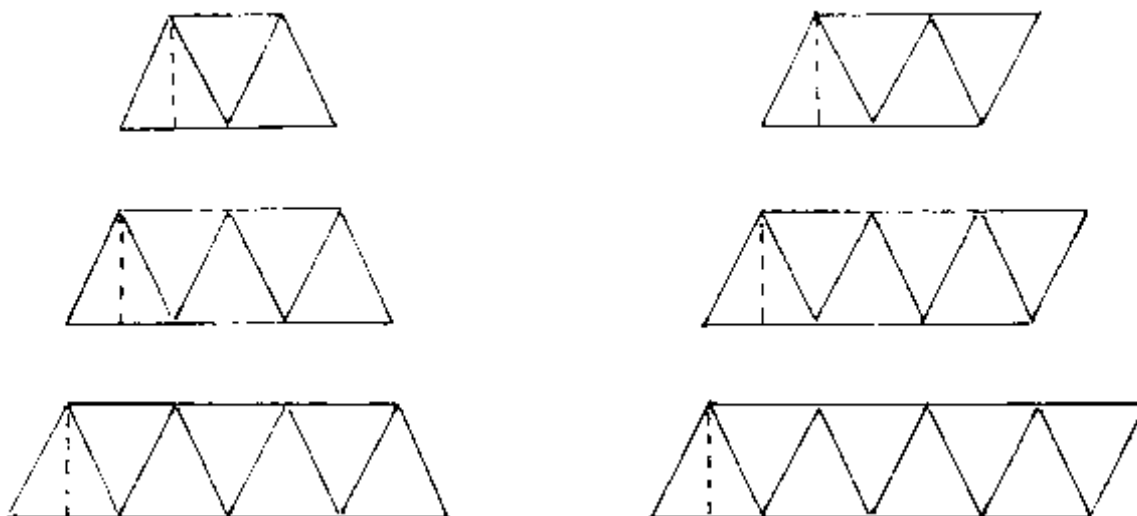
Solicite aos alunos que façam medições e comparem a altura dos triângulos com os raios dos círculos em que os polígonos estão inscritos. Verifique se eles concluem que a altura de cada um dos triângulos é uma parte do raio perpendicular ao lado ℓ de cada polígono regular (lado este que é uma corda lembra?). Essa altura é chamada apótema do polígono regular, pode ser indicado pela letra a.

Assim, a área de cada um dos triângulos identificados é dada pela expressão:

$$T = a \cdot \ell : 2$$

A área do polígono, soma das áreas dos triângulos isósceles, é, então, o número de lados n do polígono multiplicado por T, uma vez que os triângulos em cada polígono têm mesmas medidas.

A área do polígono regular também é a área de um quadrilátero equivalente a ele. Como?

Proponha aos grupos que decomponham os polígonos, recortando os triângulos e tentem compor quadriláteros já conhecidos:

Discuta com os grupos os tipos de figuras obtidas, suas características e um modo de calcular sua área, com base nas expressões utilizadas nas atividades anterior:

Observe, após a discussão, que as figuras obtidas são trapézio isósceles, se o número de lados do polígono regular for impar, e um paralelogramo se o número de lados do polígono regular for par.

Chame a atenção para o fato que a soma dos comprimentos das duas bases do paralelogramo ou do trapézio é igual ao perímetro do polígono a que se refere e a altura dos mesmos é o apótema do polígono.

Desse modo você pode discutir com os grupos um outro jeito de representar a área, usando uma única expressão para o trapézio ou para o paralelogramo:

Nº ímpar de lados: trapézio

A = (base maior + base menor) . a : 2 = p . a : 3

Nº para de lados: paralelogramo

A = (base) . a = p . a : 2

Obs.: Neste texto o p é usado para indicar perímetro.

COMENTÁRIOS:

Aqui, apresentamos o conceito de apótema de um polígono sem, no entanto, calcular o seu valor, tendo em vista a necessidade de utilizar a relação obtida pelo Teorema de Pitágoras, que será formalizado posteriormente.

Coloque ainda questões do seguinte tipo:

Se aumentarmos tanto quanto queiramos o número de lados do polígono o que podemos dizer sobre:

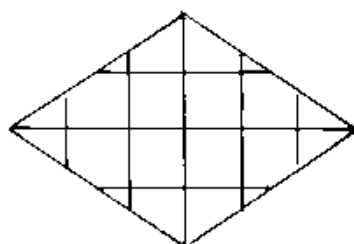
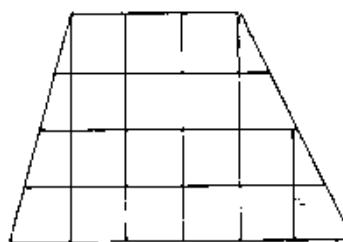
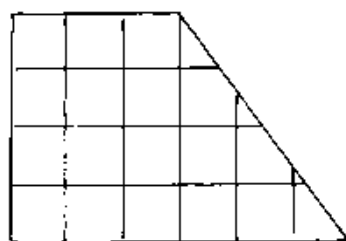
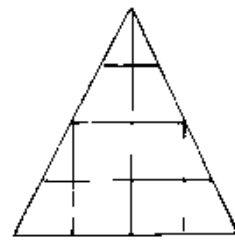
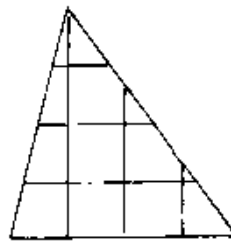
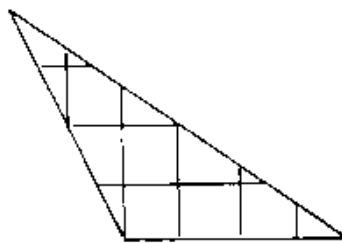
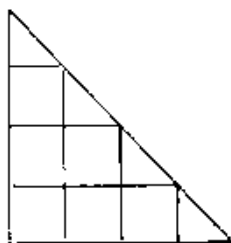
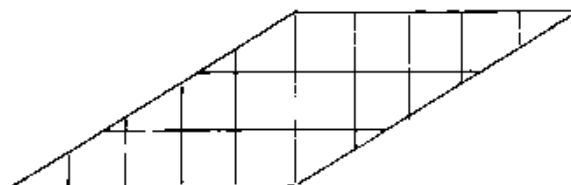
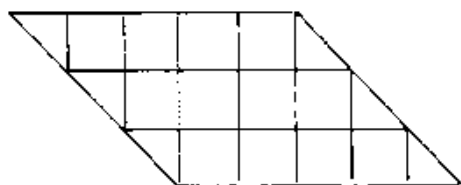
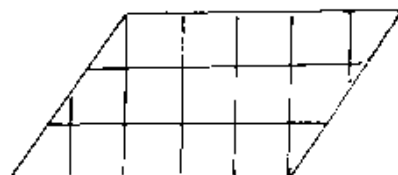
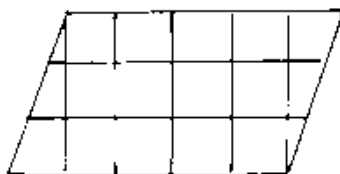
- O seu apótema?
- O seu perímetro?
- A sua área?

Discuta com eles a possibilidade de aumentar infinitamente o número de lados do polígono regular de modo que o seu perímetro e a sua área se confundam com o perímetro e a área do círculo.

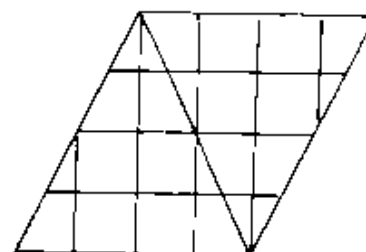
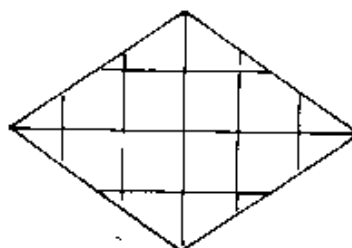
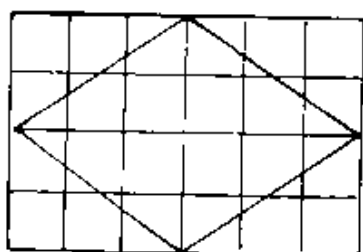
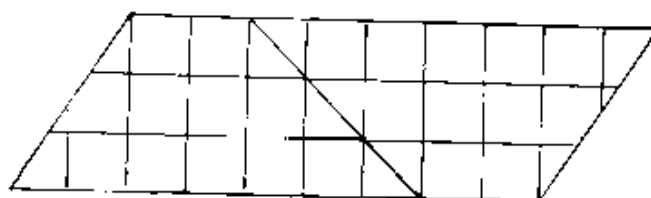
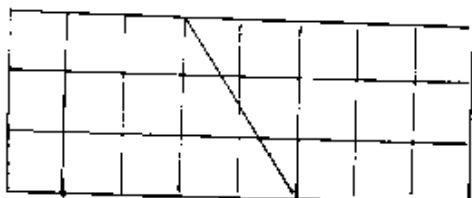
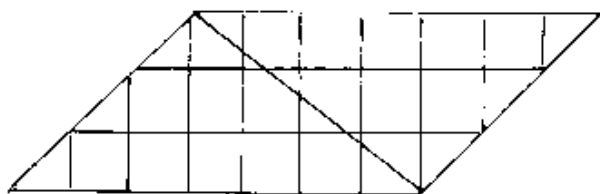
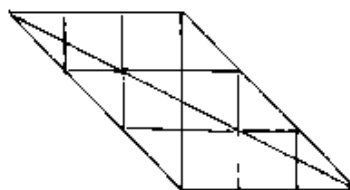
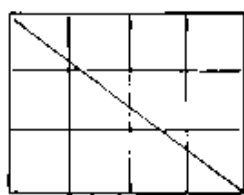
Verifique se eles concluem alguma coisa sobre uma possível expressão para o cálculo da área do círculo. Se não concluírem nada a discussão terá sido útil para a atividade sobre o perímetro do círculo logo mais adiante.

FOLHA-TIPO I-5

Observe cada grupo de figuras e tire conclusões sobre as suas dimensões.

Calcule a área de cada uma e descreva o processo que você usou para isso.

FOLHA-TIPO II-5

Observe a parte escurecida da figura e compare sua área com a da figura toda.

Como você pode calcular a área da figura escurecida usando suas dimensões e a área da figura toda?

ATIVIDADE 6: RELAÇÃO PITAGÓRICA: UMA VERIFICAÇÃO EXPERIMENTAL.

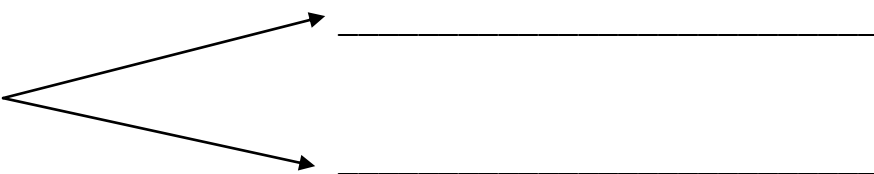
OBJETIVOS: Perceber o significado métrico e geométrico da relação de Pitágoras nos triângulos retângulos.

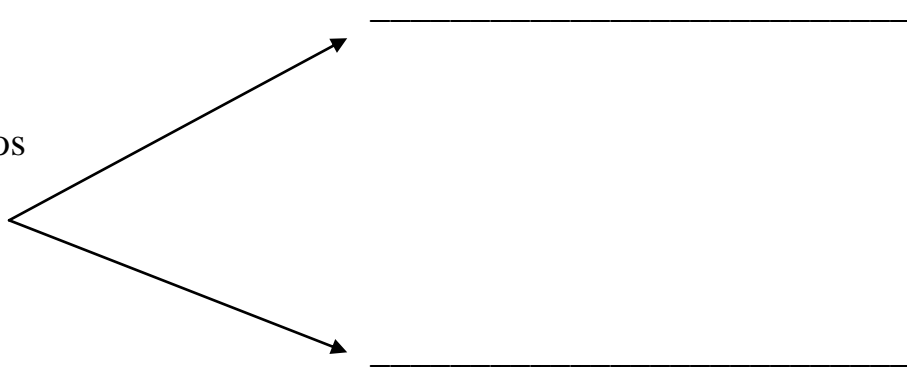
PARTE 1: UM POUCO DE HISTÓRIA E O " TRIÂNGULO EGÍPCIO".

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo I-6, tesoura, cola e barbante.

DESENVOLVIMENTO:

Divida a classe em grupos e distribua a cada um a folha-tipo I-6.

Solicite a eles que leiam e discutam o texto.

Em seguida, conte à classe que irão trabalhar com o triângulo que egípcios e chineses tão bem conheciam, e para isso receberão a folha-tipo II – 6.

Peça aos alunos que identifiquem, na figura, o triângulo retângulo, seu ângulo reto, os catetos e a hipotenusa.

O que há de comum entre o triângulo e os quadrados desenhados?

Informe aos alunos que na malha quadriculada, cada quadrícula tem 1 cm de lado. A seguir, eles poderão completar:

Peça aos alunos que pintem os quadrados sobre os catetos de cores diferentes.

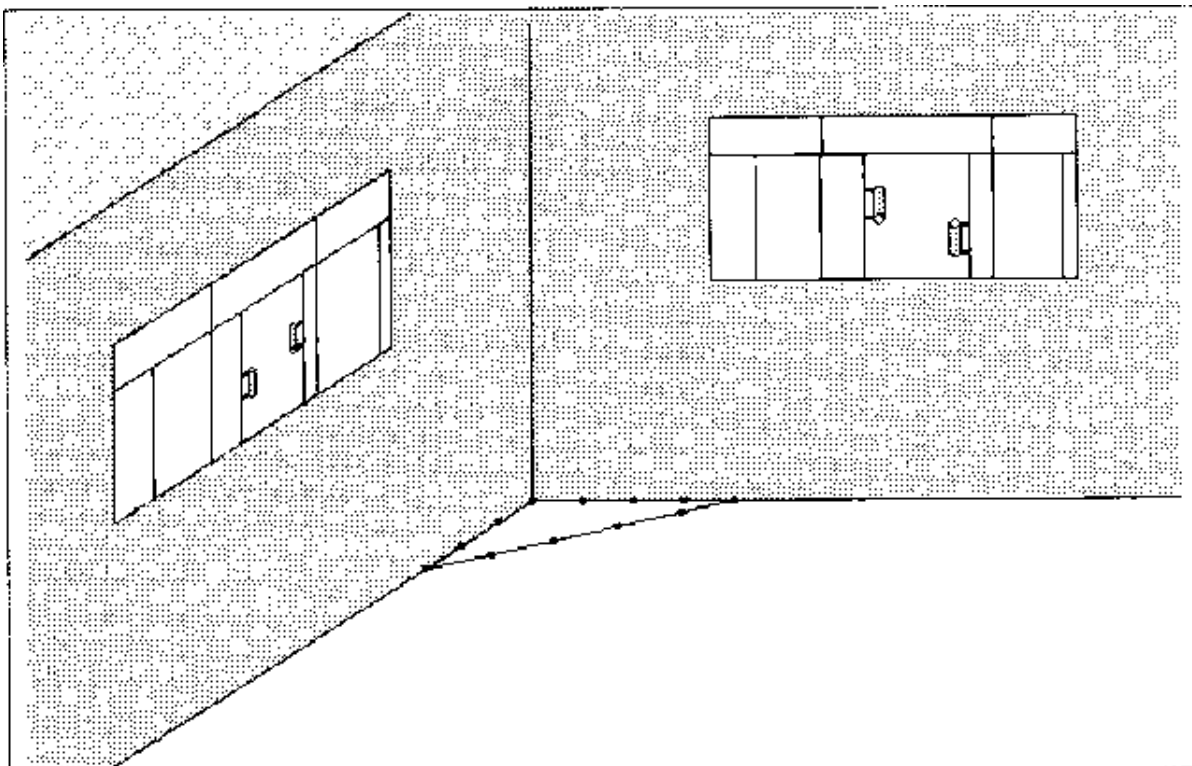
Solicite, a seguir, que recortem os quadrados coloridos, e com eles recubram o quadrado maior, se for possível.

Uma vez executada essa tarefa, eles verificarão que os quadradinhos dos quadrados coloridos recobrem o maior, concluindo a equivalência entre a área do quadrado maior e a soma das áreas dos dois menores.

Qual a área do quadrado maior?

Será que isso ocorre com todos os triângulos retângulos?

Termine esta atividade contando aos alunos que medidores de terra e construtores de pirâmides do Egito utilizavam um esquadro feito de corda e nós, para construírem ângulos retos, baseados no conhecimento que tinham desse triângulo 3 – 4 – 5. A corda tinha 12 espaços iguais entre os nós.

Peça a eles que construam um esquadro egípcio, com o barbante, para mostrar como se pode utilizá-lo, verificando se as paredes da sala de aula estão “no esquadro”.

PARTE 2: UM JOGO PITAGÓRICO.

MATERIAL NECESSÁRIO: Duas folhas de cartolina, régua, esquadro, tesoura,
Pincel atômico (duas cores) transferidor.

DESENVOLVIMENTO:

Cada aluno deverá ter á disposição o material acima descrito.

Peça a eles que desenhem no centro da cartolina uma figura como a seguinte, começando pelo triângulo retângulo cujas medidas ficam a

critério de cada um (desde que o resto da figura caiba na folha). Para tanto, eles poderão utilizar o esquadro na construção dos ângulos retos.

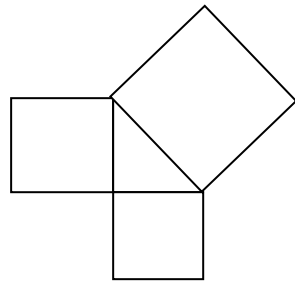



Figura 1

Oriente-os para que as construções sejam feitas com certo cuidado e capricho, caso contrário, as peças do jogo não se encaixarão.

Depois de construída a figura, solicite a eles que nomeiem os vértices dos polígonos da figura e tracem os prolongamentos de EA e DC até encontrarem os lados dos quadrados menores, nos pontos P e Q respectivamente. A seguir traçarão QR que deverá formar ângulo reto com CQ. (figura 2)

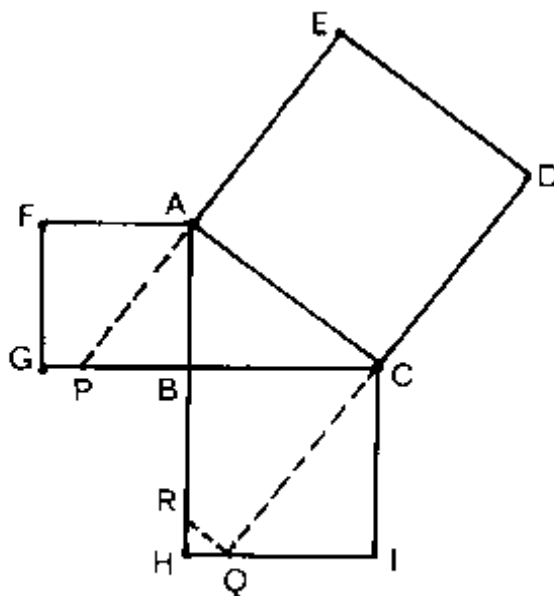



figura 2

Oriente-os para repetirem a mesma figura na outra folha de cartolina, sem as letras; basta desenharem os quadrados menores.

Depois de pronta a nova figura, peça a eles que pintem os quadrados menores com cores diferentes, e enumerem as parte em que ficaram divididos e por fim recortem as cinco peças.

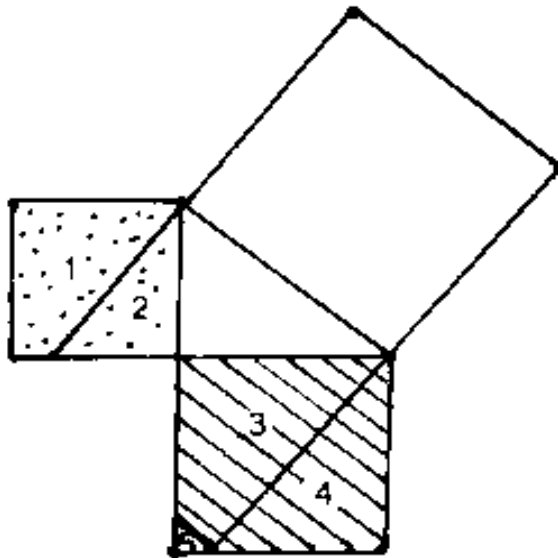



figura 3

O jogo consiste em encaixar as cinco peças no "quadradão" (sobre a hipotenusa) na primeira folha da cartolina.

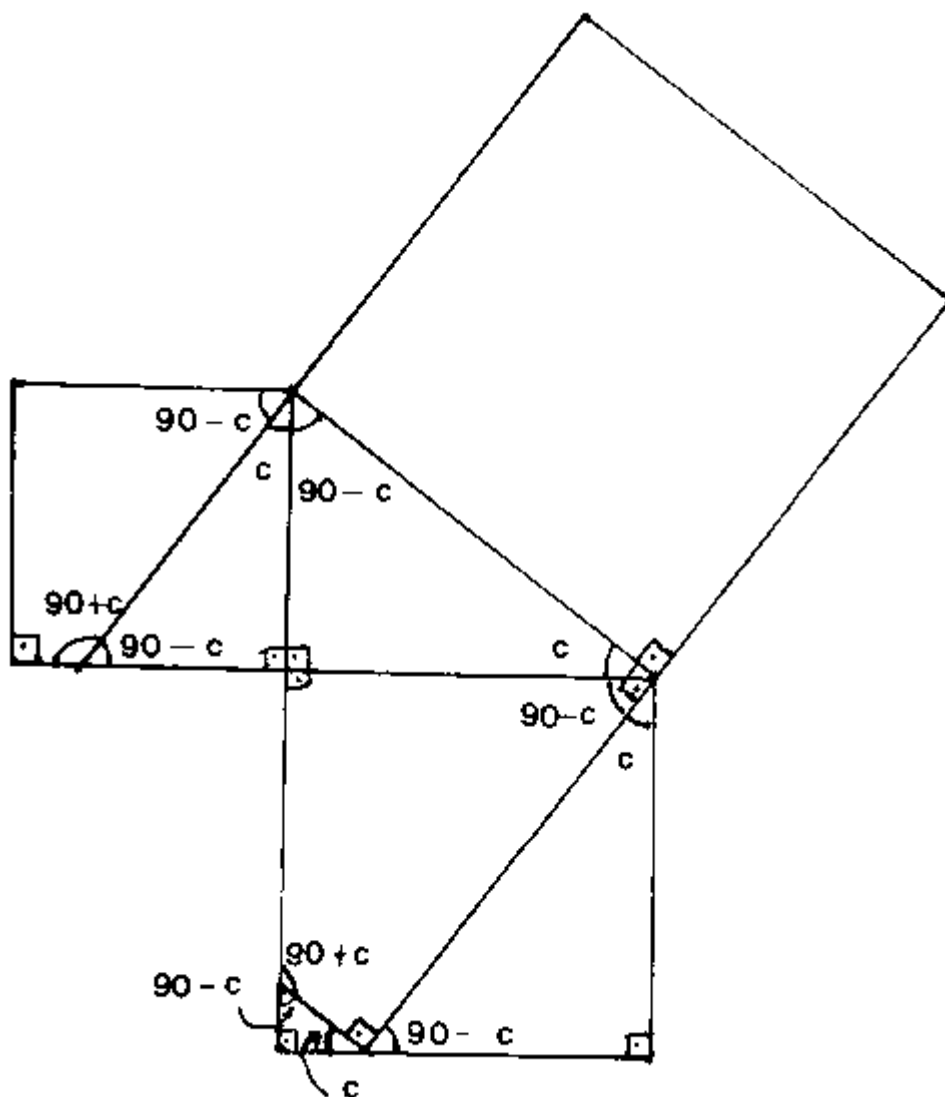
O que se pode concluir a respeito da área do "quadradão"?

Peça aos alunos que meçam o ângulo C do triângulo (figura 2) e, sem medir, que digam quanto devem medir os ângulos de cada uma das cinco peças do jogo. É conveniente que tenham o esquema da figura 2 para responderem a esta questão, com justificativas.

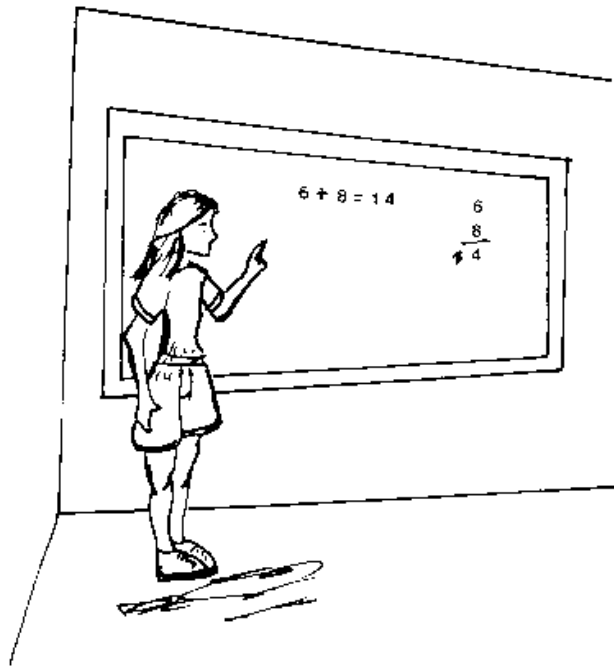
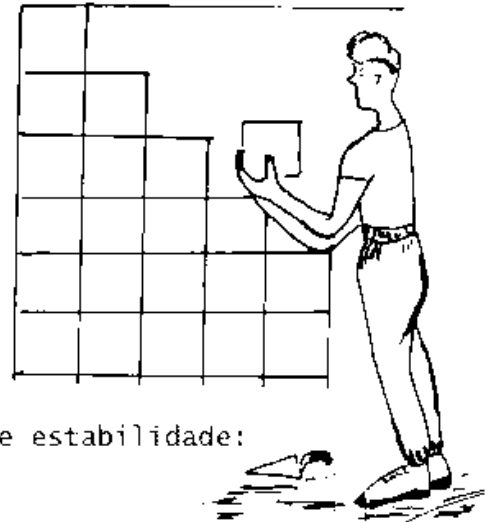
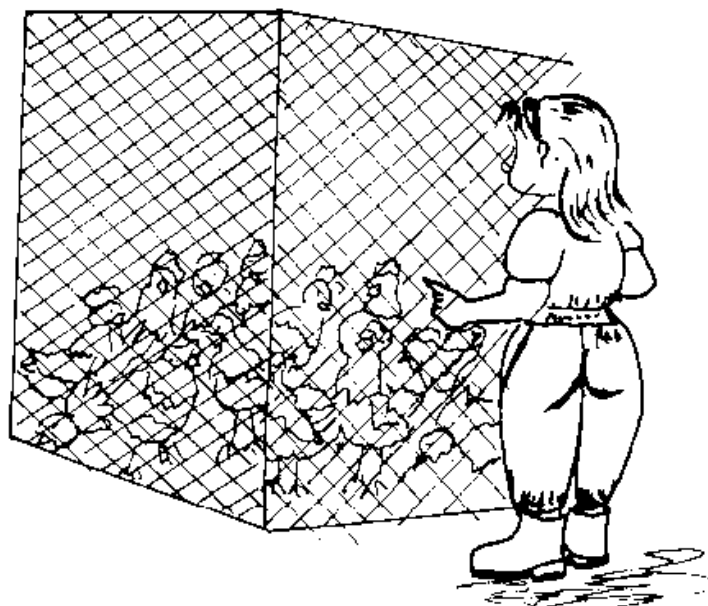
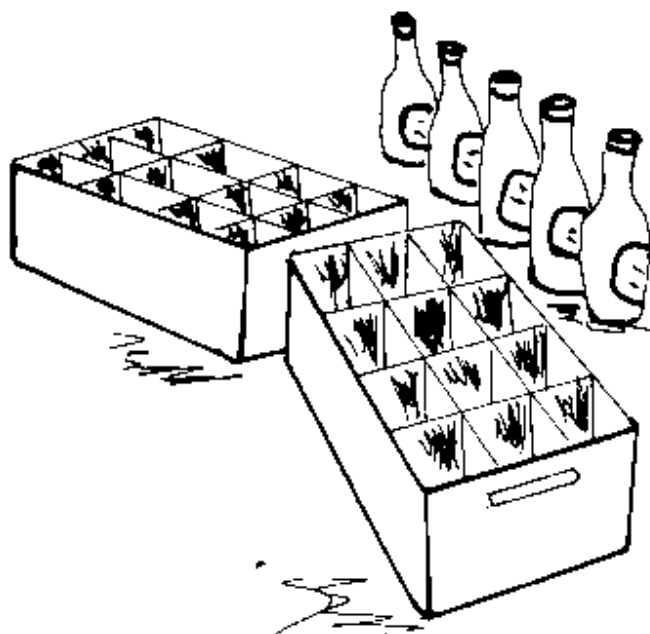
COMENTÁRIOS:

O principal objetivo desta atividade é levar os alunos a

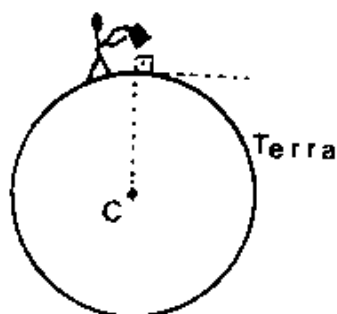
perceberem que no triângulo retângulo construído, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das área dos quadrados construídos sobre os catetos.

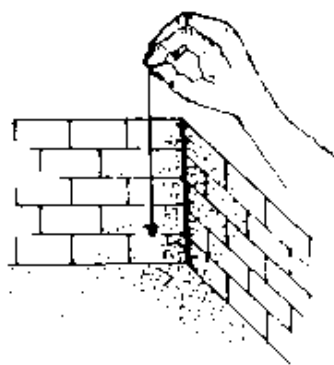
Quanto à justificativa das medidas dos ângulos das peças do jogo, ela baseia-se fundamentalmente no fato dos ângulos agudos de um triângulo retângulo serem complementares.

FOLHA-TIPO I-6

Um pouco de história e o triângulo egípcio.

Você já deve ter percebido que o espaço que nos rodeia está cheio de objetos, nos quais o ângulo reto tem importância fundamental?

FOLHA-TIPO II-6

nas caixas

Assim, o homem percebeu, desde muito cedo, que saber construir ângulos retos era de fundamental importância para poder levantar casas, templos, palácios, como também para delimitar seus terrenos e medi-los.

A importância do ângulo reto se deve a uma propriedade do planeta em que vivemos, a Terra, que atrai todos os objetos em direção ao seu centro; é por isso que quando largamos um objeto, ele cai perpendicularmente à Terra.

É por isso também que o fio de prumo ainda hoje é utilizado para verificar a perpendicularidade do muro em relação ao solo.

FOLHA-TIPO I-6

Assim, o triângulo retângulo é uma figura muito conhecida desde muitos anos antes de Cristo. Ele (o triângulo, não Cristo) possui propriedade muito interessantes.

Uma delas é atribuída a Pitágoras;

A soma dos quadrados das medidas dos catetos de um triângulo retângulo é igual ao quadrado da medida da sua hipotenusa.

Antes dele, muitos povos tinham conhecimento e aplicaram tal propriedade. Entretanto, o que se pode conjeturar é que a primeira prova efetiva dessa propriedade seja devida à sociedade pitagórica, que tinha em seu fundador, Pitágoras, um de seus maiores expoentes.

Os babilônios, muitos antes de Pitágoras (mais ou menos 1000 anos) já haviam descoberto a diagonal de um quadrado, dada a medida do lado.

Os egípcios, por sua vez, conheciam um caso particular dessa relação. Há 2000 anos antes da era cristã, esse povo já se tinha dado conta de que um triângulo com lados de 3, 4 e 5 unidades de medida é retângulo e saibam que $3^2 + 4^2 = 5^2$. Aliás, as pirâmides que construíram são testemunhas do conhecimento que os egípcios tinham desse fato. Entretanto,

FOLHA-TIPO I-6

não há provas de que conhecessem ou pudessem demonstrar essa tal propriedade do triângulo retângulo.

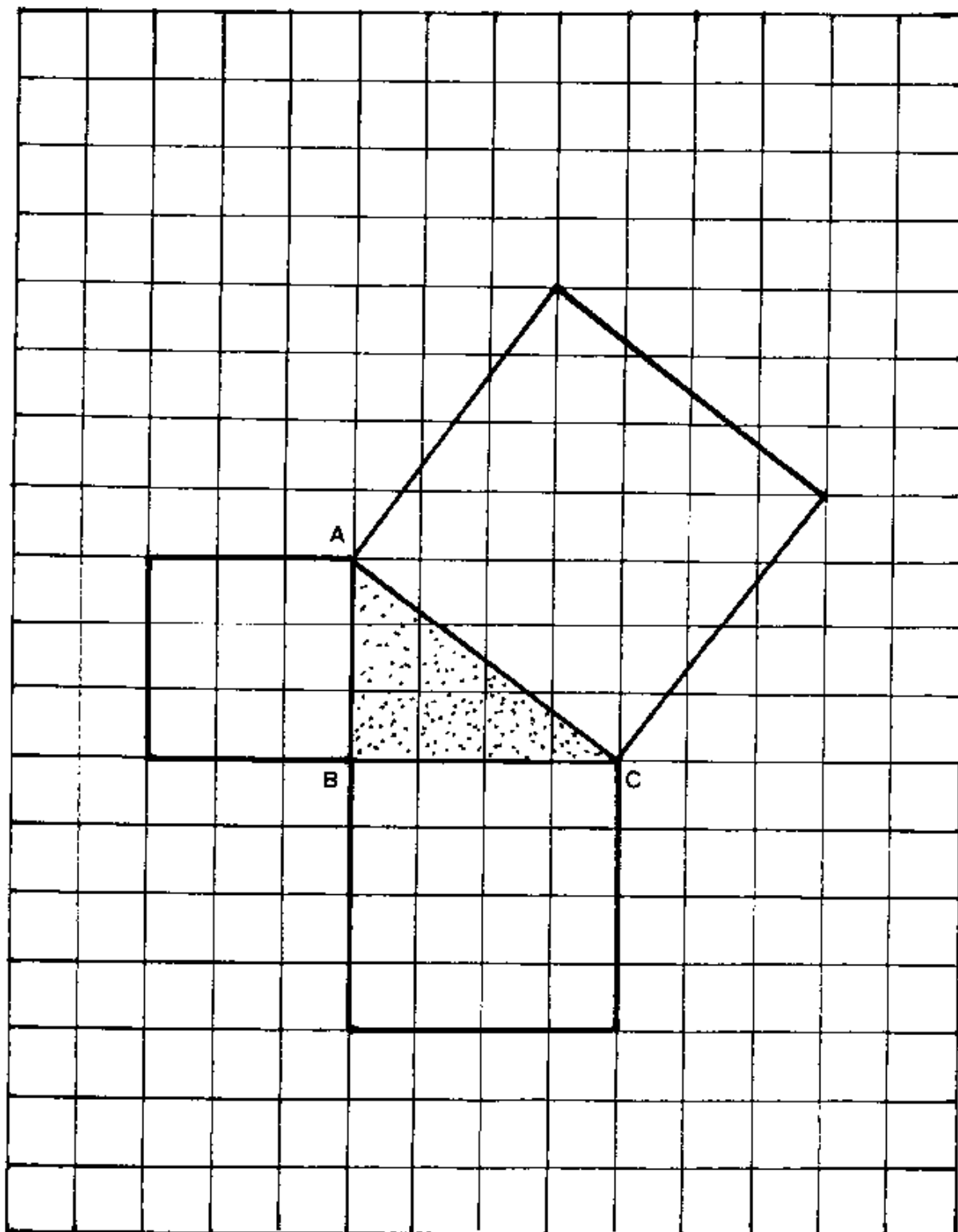
Não foi privilégio dos povos ocidentais a aproximação menos ou mais formalizadas com a relação pitagórica.

O Chou Pei Suan Ching chinês (que remonta ao período Han, 202 a.C. a 220 a.C. e possivelmente muito antes) inclui um trecho em que o que fala dá instruções ao que ouve para "quebrar a reta e fazer a largura 3, o comprimento 4 então a distância entre os cantos é 5" (Harriet D. Hirschy – O teorema Pitagórico).

Também os hindus, 500 a.C., ao escreverem sobre as regras relacionadas às proporções de altares mostraram que conheciam a relação entre os lados do triângulo retângulo, mais tarde conhecida como a Relação de Pitágoras.

Afinal, que propriedade é essa que tanto interessou e encantou os homens desde há muito e muito tempo?

FOLHA-TIPO II-6

Um pouco de história e o triângulo egípcio.

ATIVIDADE 7: COORDENADAS CARTESIANAS.

OBJETIVOS: Desenvolver a noção de coordenadas.
Utilizar um referencial cartesiano no plano.

PARTE 1: O PEDESTRE.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo I-7.

DESENVOLVIMENTO:

Forme grupos com 4 alunos e distribua para cada um deles, uma folha-tipo I-7. Peça que leiam o problema apresentado e ajudem o pedestre a chegar onde deseja. Discuta alguns dos trajetos propostos. Embora haja várias possibilidades de caminhos, discuta a importância de torná-los curtos e rápidos em alguns momentos.

Este trabalho proporciona discussões sobre necessidades de termos referenciais para nos localizarmos. Aproveite para discutir o trajeto de cada um de casa até a escola e que tipo de informação podem dar para alguém ter idéia de como chegar à escola a partir da sua casa ou como chegar à sua casa saindo da escola.

PARTE 2: O GUIA DA SUA CIDADE.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo II-7, guia da cidade.

DESENVOLVIMENTO:

Entregue a cada grupo de 4 alunos uma folha-tipo II-7 e dê um tempo para a análise e discussão da situação apresentada. Esta consiste em ler a legenda e situar a rua grifada na região da cidade que foi destacada.

Discuta com os alunos os tipos de situações em que necessitamos nos orientar, reunir informações para ao final localizarmos uma rua, uma cidade, um país, uma estrela, um ponto. Qualquer uma dessas situações exige algum conhecimento de coordenadas.

Lembre-os da atividade sobre coordenadas geográficas realizada na 6ª série. Você pode trazer um mapa ou globo para a classe e discutir alguns tipos de coordenadas.

Você pode solicitar que os alunos tragam guias da cidade onde moram, para localizar uma determinada rua.

Peça para folhearem o guia e observarem que há uma parte onde se encontram as plantas de ruas da cidade e uma outra contendo o índice das ruas. Vale a pena se deter um pouco no índice de ruas, abrindo em uma página qualquer do mesmo e observar as informações que ele traz. Por exemplo, no guia da cidade de São Paulo, o nome das ruas aparecem da seguinte forma:

KEN - LAR

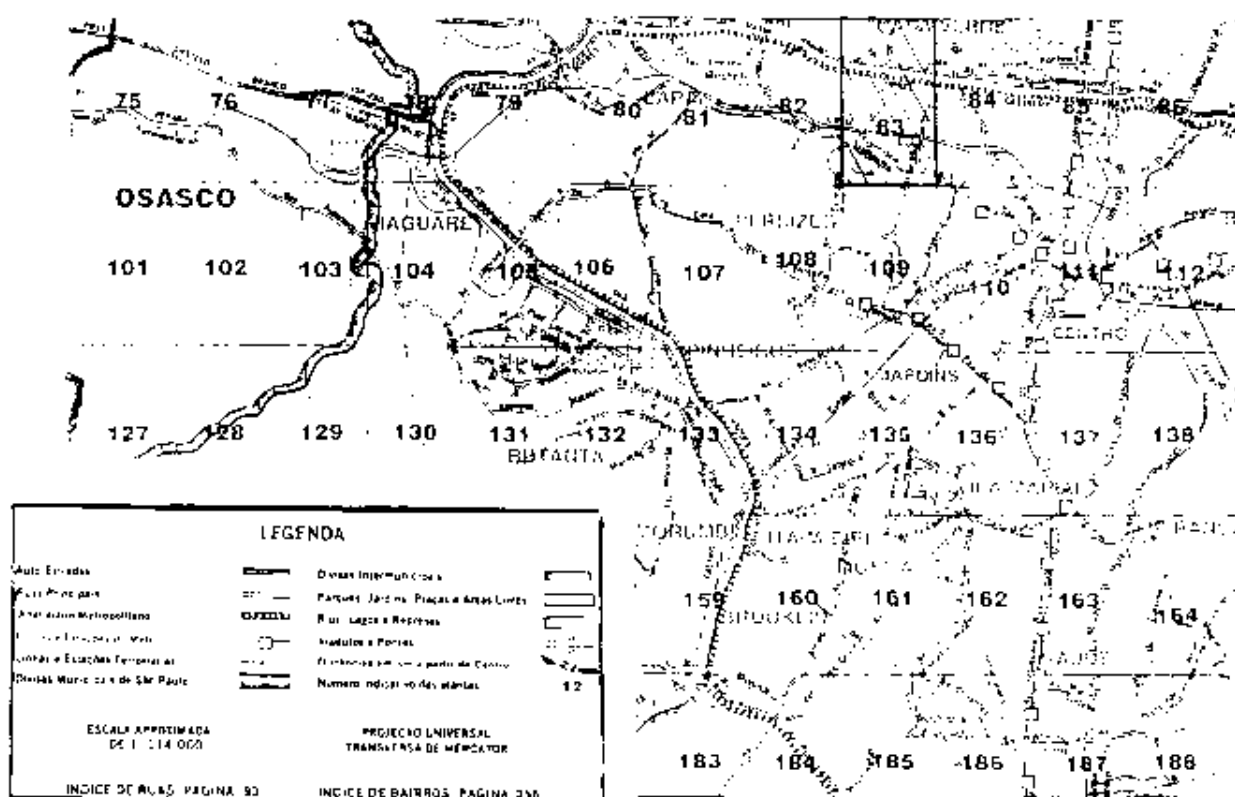
304 ÍNDICE DE RUAS — **CEP - Logradouro - planta - ônibus**

03046 Kennedy, Pres., pça. 84 D3
2084 2100 2101 2102 2680 309N 3111 3115 3115 3123 3141 3147 3151 3153 3180 3201 3269 3302 3306 3310 3406 3407 3412 3414 3426 3459 3540 3574 3586 371T 393H
09920 Kennedy, Pres., av. (Diadema) 190 C3
06220 Kennedy, Pres., av. - até 1450 - (Osasco) 49 D1
06290 Kennedy, Pres., av. - de 1451 ao fim - (Osasco) 49 D1
09560 Kennedy, Pres., av. - lado ímpar - (S. Caetano) 152 A3
09570 Kennedy, Pres., av. - lado par - (S. Caetano) 152 A3
06220 Kennedy, Pres., pça. (Osasco) 48 D3
09040 Kennedy, Pres., pça. (Sto. André) 173 C3
04251 Kenzan 158 A2
09130 Kepler (Sto. André) 197 F3
06750 Kharmall (Tab. Serra) 138 D1
07190 Kida (Guarulhos) 17 D1
02512 Kiel 56 B3
06382 Kimdoshi Tucum 108 C3
02131 Kioto 34 F2
03580 Kira 98 D3
08050 Kris, dos 67 A3
04171 Knizo Ubyama 149 B1
02245 Kitts e Neves, São Jr. 32 B3
08500 Kuwa Iwasa (F. Vasconcelos) 87 F3
04950 Kiyoji Isome 204 F3
03547 Kyoshi Hirata 98 A2
3420 3777

08230 Lacre 66 C2
08030 Lactâncio 40 B2
Ladainha 36 C2
04425 Ladeira do Mar 189 C3
02174 Ladak 60 D3
02247 Ladário 33 B1
1732 1736
02247 Ladário, Ir. 33 B1
00010 Ladário, Br. de 34 B1
172C 174M 209R 2123 2124 2177 2175 2729 319C 3199 371T 701A
05635 Ladário Teixeira 122 C2
02309 Laselra, Cel. 12 F1
09390 Ladeira Formosa (Mauá) 178 C2
02556 Ladislau, São 29 D1
05682 Ladislau Baena 181 C1
Ladislau Bartz, Ir. 113 D2
04467 Ladislau dos Santos 188 D2
06290 Ladislau Eugênio Camargo (Osasco) 49 C1
05830 Ladislau Ladico, pça. 181 E4
02271 Ladislau Neto 12 E3
05802 Ladislau Pelei, Prof. 184 C1
05515 Ladislau Roman 163 D3
05875 Lady R. Barthólo 182 D1
02315 Laelias, das 12 C1
06530 Laércio Bastos Pereira 183 C2
04706 Laércio Corte, Dep. 142 B3
03962 Laércio de A. Penteado 137 D1
04187 Laércio de Oliveira, Cel. 170 A2
09320 Laércio dos Santos (Mauá) 179 E1
03058 Laércio Luis Magri 86 A3
04360 Laércio Neves 147 E1

02838 Lagoa Queimada 28 A2
9121
05856 Lagoa Real 194 B3
02280 Lagoa Sacopenapã 13 A3
08220 Lagoa Salgada 87 F3
2064 233A 253F 263U 273C 273V 3310 342N 352A 3574 368E 373P
02852 Lagoa Santa, av. 8 B3
07190 Lagoa Santa (Guarulhos) 17 C1
03482 Lagoa Seca 114 C2
08290 Lagoa Tal Grande 93 D2
3061 3091 3306 3407 342X 3750 3766
02302 Lagoa Verde 32 B2
03156 Lagoa Vermelha 112 D1
07000 Lagoa Vermelha (Guarulhos) 17 B2
02983 Lagoas de Camacho 4 A2
02757 Lagoinha 28 B1
02872 Lagoinha da Leste 8 C1
08150 Lagonegro, Frei 78 B2
04774 Lagos, av. dos (Jd. Cristina) 186 C3
04805 Lagos, av. dos (Jd. das Camélias) 207 F3
04761 Lagrange 163 D2
5185
04232 Lágrimas, estr. das - até 2500 - 138 D2
04244 Lágrimas, estr. das - de 2501 a 3600 - 138 D2
4621 4672 4624 4707 476H
04726 Laguna 143 E2
6040 6422
06270 Laguna (Osasco) 73 D2
33208 Laguna, Br. de (V. Califórnia) 132 C2

A faixa superior indica tais informações, as ruas colocadas na ordem lexicográfica, como nos dicionários. Há um número (CEP) na coluna à esquerda seguido do nome da rua, das coordenadas indicando a página e a região da respectiva planta e por último o código do ônibus que serve à região.

Cada página que tem o mapa das ruas é parte da planta geral da cidade que foi segmentada para facilitar o manuseio do guia.

Cada quadro com um número na figura acima, representa uma página do guia. Nesse caso, é importante examinar o mapa geral da cidade que acompanha o guia. Tente junto com os alunos identificar as informações que aparecem numa dessas páginas, a da folha-tipo II-7, por exemplo:

- As ruas trafegadas por ônibus municipais.
- As distâncias relativas ao marco zero da cidade.

- A escala em que a planta foi desenhada.
- Se a região é servida por linha de metrô.

A seguir, coloque o nome da rua da escola na lousa e peça para localizarem-na no guia. Após a verificação, solicite que façam o mesmo em relação à rua em que moram.

PARTE 3: O PAPEL QUADRICULADO.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo III-7.

DESENVOLVIMENTO:

Distribua a cada aluno uma folha-tipo III-7 e peça para eles desenharem a figura 1 no papel quadriculado maior além de anotarem o procedimento adotado.

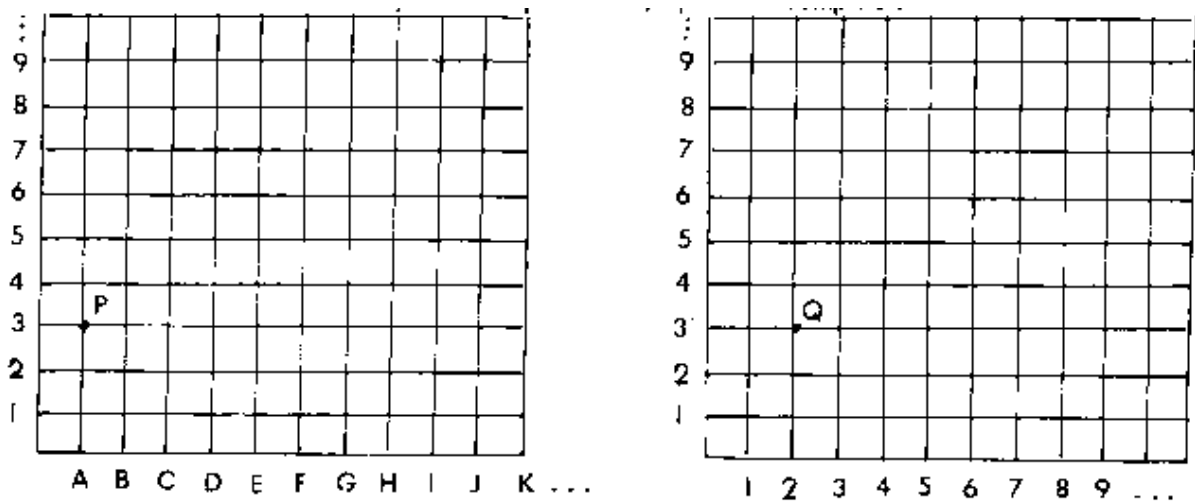
Discuta com eles esse procedimento, ressaltando a necessidade do uso de coordenadas. Após verificar como eles realizaram a tarefa, proponha a cada grupo que escreva um conjunto único de instruções para que alguém que desconhece a figura possa reconstituí-la em papel quadriculado.

PROJETO: AS MENSAGENS

Feita as verificações sugira a cada grupo que invente uma outra figura e escreva mensagens para serem trocadas com outro grupo. Entre as instruções enviadas não pode estar o próprio desenho, mas, somente os códigos baseados nas características do papel quadriculado. Cada grupo deverá fazer a figura de acordo com essas mensagens recebidas. Depois de concluído

o desenho da figura este pode ser devolvido ao grupo de origem para ser conferido e, para uma posterior exposição dos trabalhos na classe.

COMENTÁRIOS:

Depois de examinar a compreensão dos alunos de como se localizar espacialmente, de como fazer um desenho no quadriculado, usando diferentes tipos de instruções, sugira a unificação dos procedimentos, através da numeração do quadriculado e da nomeação de pontos, por exemplo:

Assim, pode-se localizar pontos no quadriculado a partir das informações colocadas nas laterais, por exemplo, um ponto como o ponto P pode ser dado pelas informações (coordenadas) (A, 3) e o ponto Q pelas coordenadas (2, 3). A ordem das coordenadas é uma convenção.

O SISTEMA CARTESIANO.

Discuta com os alunos, que em relação a esse tipo de situações há um modo organizado e convencionado, para representar objetos matemáticos como ponto, reta, circunferências, curvas de diversos tipos que é o sistema de coordenadas retangulares, conhecido como sistema cartesiano, em homenagem ao matemático e filósofo francês Renè Descartes (1596 – 1650), um dos estudioso e organizadores das propriedades de figuras como essas. Ele

se preocupou com a relação entre aritmética e álgebra com a geometria. Sua obra pode ser caracterizada como a tradução de operações algébricas em linguagem geométrica.

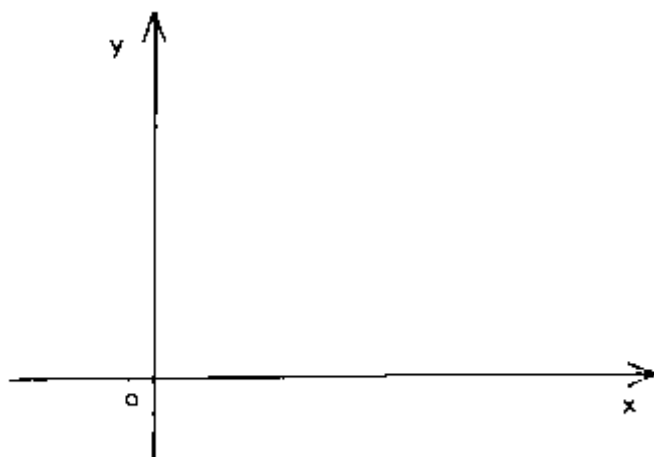
Embora outros matemáticos tenham pensado nessas questões antes, foi Descartes, que no latim era conhecido como Cartesius (Descartes), quem o fez de forma mais organizada e profunda.

Observação: Livros como História da Matemática de Carl Boyer e a A Matemática de Pitágoras a Newton de Lúcio Lombardo Rádice, trazem informações complementares sobre esse assunto.

PARTE 4: PARES ORDENADOS E SISTEMAS DE EIXOS COORDENADOS.

MATERIAL NECESSÁRIO: Papel quadriculado.

DESENVOLVIMENTO:

Os gráficos que estamos acostumados a ver e interpretar são feitos através de um processo organizado e convencionado, tal qual nos ensinou Descartes, num sistema de referência, o sistema cartesiano.

No plano, este sistema de referência é constituído de duas retas orientadas e perpendiculares.

Como no desenho do papel quadriculado feito anteriormente, essas retas são chamadas de:

eixo x (das abscissas)

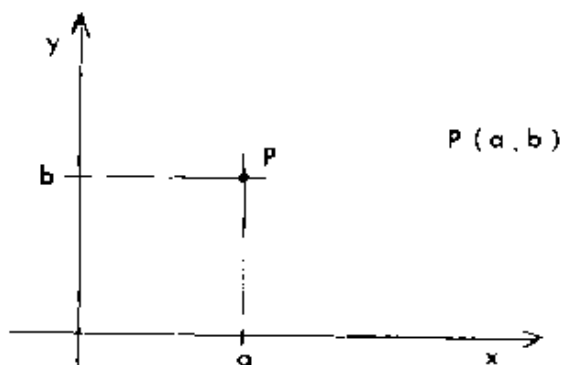
e

eixo y (das coordenadas)

com o ponto de intersecção 0, a partir do qual podemos representar os números racionais.

Em cada reta é fixada uma unidade para representar o números racionais.

No papel quadriculado, essa unidade coincide com a medida do lado do quadrado.

Assim, um ponto no plano tem suas coordenadas retangulares (cartesianas) representadas do seguinte modo:

Solicite ou forneça uma folha de papel quadriculado ou milimetrado para cada aluno.

Peça que desenhem um sistema de eixos coordenados e proponha que:

1.- Localizem os seguintes pontos no plano cartesiano:

A = (2, 3)   D = (5, 0)

B = (-3, 1)   E = (0, -3)

C = (-5, -2)   F = (0, 0)

2.- Considerem os pontos dados como pontos situados sobre o contorno de uma figura.

Após localizar esses pontos no gráfico, traças a figura, ligando os pontos por um segmento de reta.

A = (-2, 9)   E = (7, -4)

B = (5, 9)   F = (-4, -4)

C= (8, 1)   G = (-5, -3)

D = (8, - 3)   H = (-5, 1)

COMENTARIOS:

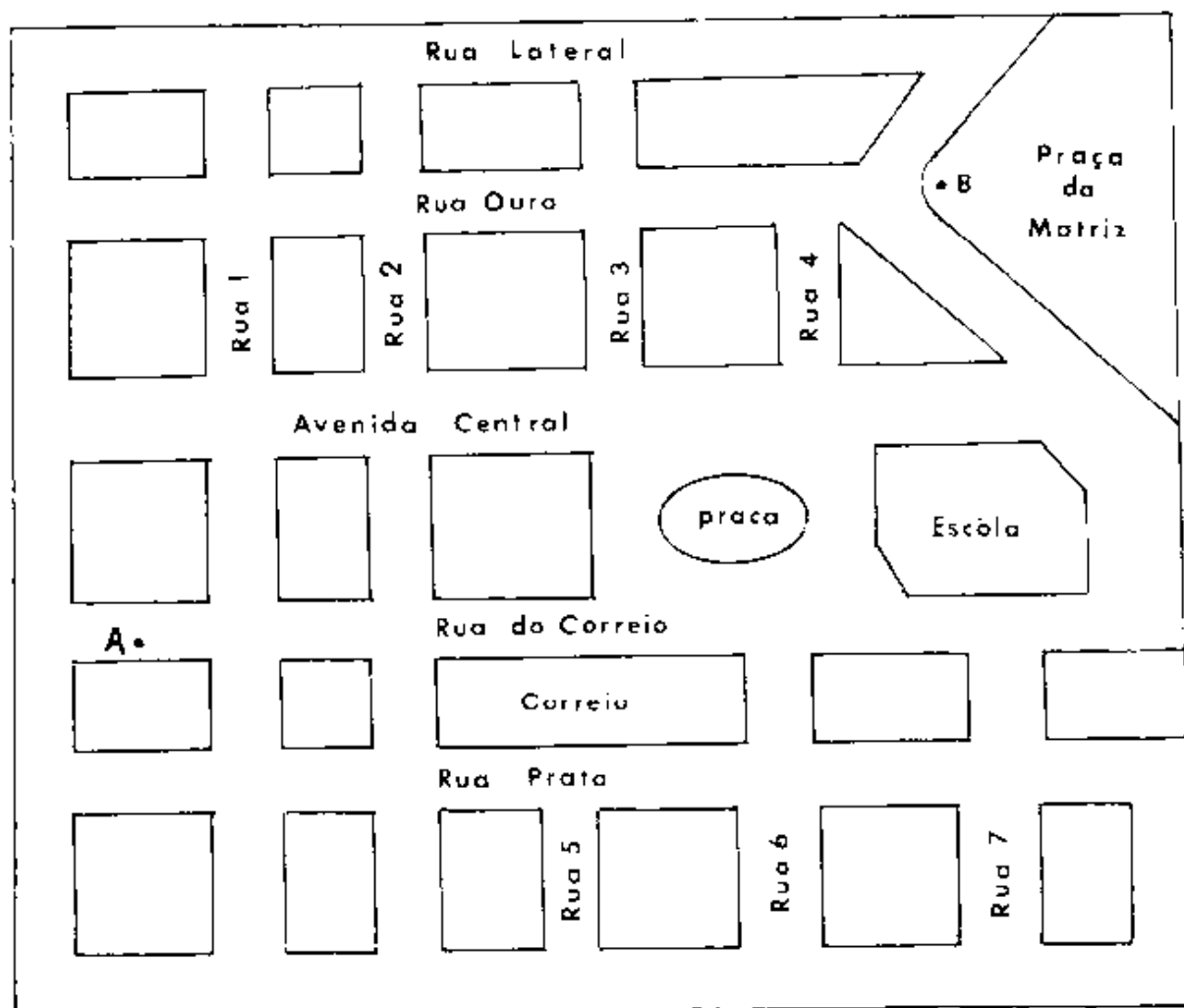
Pretende-se com essa atividade que o aluno tenha uma visão geral sobre um sistema de referência cartesiano, o que facilitará a interpretação e o traçado de gráficos, além de trazer informações importantes sobre a localização em outros sistemas de referências.

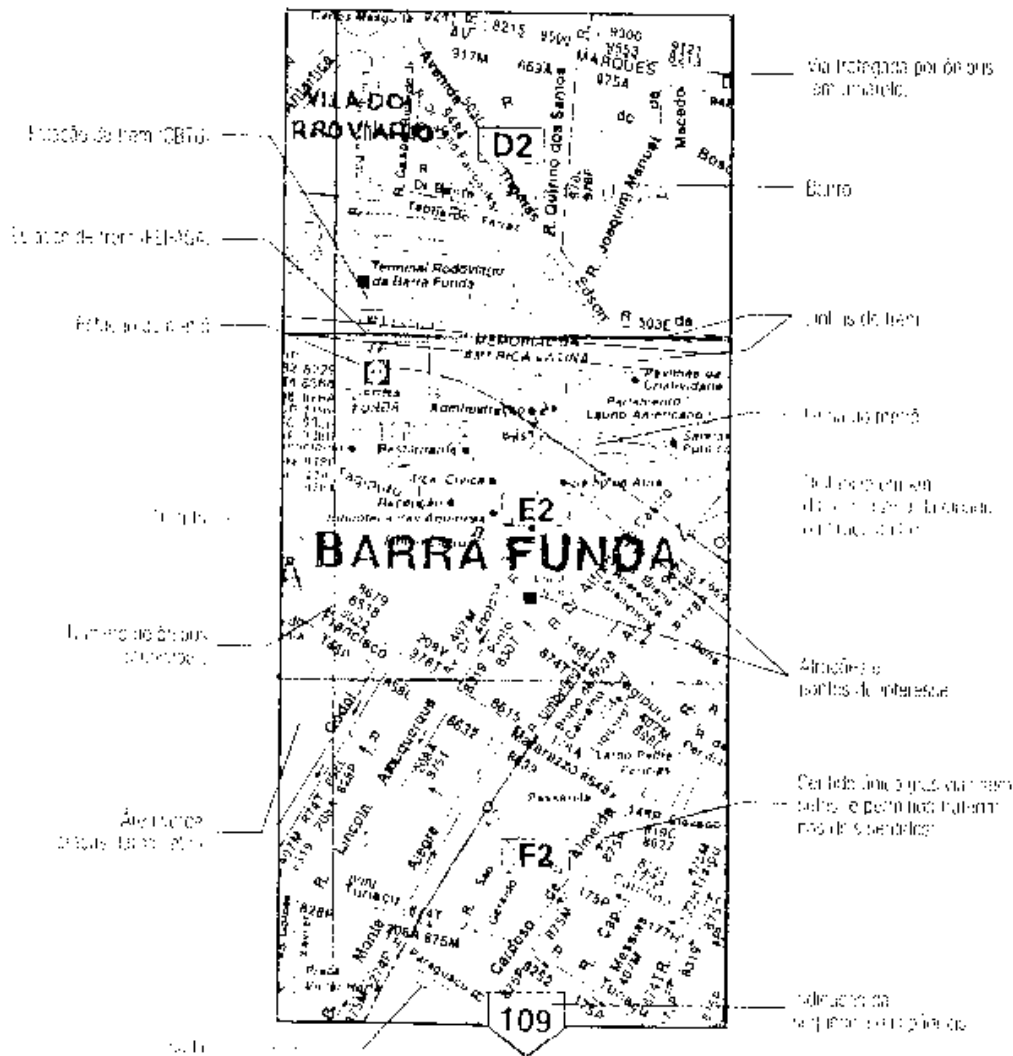
Não é necessário um aprofundamento maior, nesse momento sobre a representação de figuras como retas e curvas, o que poderá ser feito à medida em que o conjunto dos números reais for sistematizado.

No entanto, é necessário saber localizar pontos, nomear os eixos das abscissas e ordenadas e o que são os quadrantes, além de observar como ficam os sinais das coordenadas em cada quadrante.

FOLHA-TIPO I – 7

A figura abaixo representa a planta de uma parte de um bairro da cidade. Um pedestre chegou na Rua do Correio exatamente no ponto A, ele está pedindo ajuda para chegar ao ponto B, na Praça da Matriz.

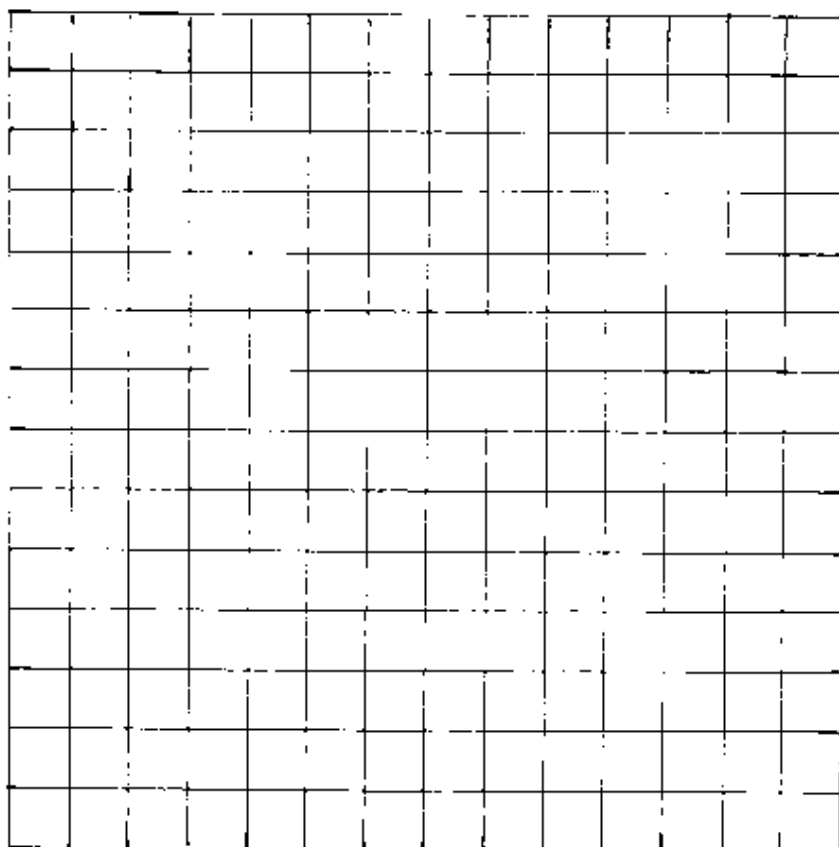
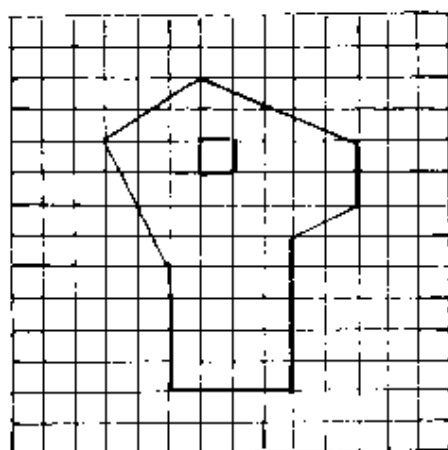
Discuta com o seu grupo uma forma de ajudar o pedestre, de modo que ele ande o mínimo possível. Escreva então, as informações necessárias para descrever o trajeto a ser seguido pelo pedestre.

FOLHA-TIPO II – 7

Esta é uma página do guia da cidade de São Paulo. Localize nela a rua que aparece sublinhada na legenda.

As informações sobre o sentido do tráfego foram fornecidas pela CET.
Nas vias sem setas, o tráfego é permitido nos dois sentidos.
Quando existe circulação de ônibus no contrafluxo,
assinalamos a via com ◄

FONTES: Prefeitura Municipal de São Paulo e
CET - Companhia de Engenharia de Tráfego
Escala aproximada: 1: 12 300 (Projeção universal transversa de Mercator).

05653-190 Alfredo da Silva Guerra F.º 204 F2
03283-200 Alfredo Dabat, Ir. 142 F2
03407-080 Alfredo Dammi, tr. 116 B1
01555-060 Alfredo de Caabo, Dr. 83 E2
03430-120 Alfredo de Franco 90 F1
208A
Alfredo de Melo 72 C3
2090 2731 2769
04110-800 - até 531
05120-290 - de 532 ao fim
04117-020 Alfredo de Salles Oliveira
Netto 107 A2
09360-580 Alfredo de Sousa (Mauá) 244 C1
04525-270 Alfredo de Toledo 110 D1
3020
05540-020 Alfredo Di Vernieri, Dr. 131 D3
09950-060 Alfredo Dias do Nascimento
(Diadema) 238 C2
03370-030 Alfredo do Vale Cabral 115 C3

FOLHA-TIPO III – 7

Copie a figura do quadriculado I no quadriculado II, mantendo a sua posição e a forma. Observe para depois discutir com a classe o processo que você utilizou para situar as figuras no novo quadriculado. Escreva através de instruções o processo utilizado pelo seu grupo.

ATIVIDADE 8: INTERDEPENDÊNCIA DE GRANDEZAS.

OBJETIVOS: Desenvolver a noção de interdependência de duas grandezas.
Representar graficamente a variação de duas grandezas e analisar o comportamento dessa variação.

PARTE 1: AS CONTAS DE LUZ DE PAULINHO.

MATERIAL NECESSÁRIO: Contas de luz, folha-tipo I-8 e anexo I.

DESENVOLVIMENTO:

Antes de distribuir a folha-tipo peça aos alunos que analisem as contas de luz que trouxeram e verifiquem que no espaço reservado para indicar o consumo de energia esta escrito KWH. Informe à classe, caso ainda não saibam, que o KWH (quilowatt-hora) é a unidade de medida de energia elétrica que as distribuidoras utilizam para medir o consumo de energia e, assim, calcular os valores mensais das contas de luz.

Aproveite a oportunidade e explique como se calcula o consumo de energia elétrica de alguns aparelhos elétricos:

Multiplicando a potencia do aparelho, cuja unidade é o W (watt) pelo numero de horas que ele permanece ligado e obtém-se um número em wh (W x h) e para se transformar em KWH dividimos por mil o número pois 1 KW = 1000W.

Um exemplo:

Uma lâmpada de 100 watts permanece acesa durante 5 horas diárias. Qual é o consumo de energia elétrica em KWH desta lâmpada em um mês? Quanto custa esta energia?

Assim, os alunos poderão fazer os cálculos:

5 h x 30 = 150 h mensais

100 W x 150 h = 15 000 WH = 15 KWH

Multiplicando o valor em reais do KWH por 15 encontraremos o custo mensal de energia desta lâmpada.

Proponha mais um problema deste tipo:

Um chuveiro elétrico de potência de 250 W é ligado diariamente por 2h 30 min. Qual é o gasto mensal de energia elétrica deste chuveiro em KWH? Qual é o custo desta energia?

Após este trabalho, distribua a folha-tipo I-8 para cada aluno e solicite que, em pequenos grupos, analisem o gráfico e respondam às questões propostas. Na análise do gráfico espera-se, por exemplo, que os alunos percebam que apesar de julho não ter sido o mês de maior consumo, foi o de maior acréscimo de consumo em relação ao mês anterior (600 KWH – 300 KWH = 300 KWH). O mês em que houve maior economia em relação ao mês anterior foi novembro (650 KWH – 450 KWH = 200 KWH).

Comente com os alunos que utilizou-se no gráfico números múltiplos de 10 para facilitar-lhes a primeira análise de um gráfico deste tipo. Também não e nada comum haver tanta variação no consumo de energia elétrica em uma residência.

Considere com a classe que o consumo de energia elétrica na casa de Paulinho é bastante alto.

Distribua, em seguida, a folha-tipo I-8a para aluno e solicite que leiam o texto e respondam às questões propostas. Deseja-se que os alunos percebam que, para verificar se está gastando mais ou menos energia de um mês para outro, ele deverá analisar o consumo em KWH, unidade de energia elétrica, e não necessariamente o total em reais, pois as tarifas são constantemente reajustadas. A própria conta de luz fornece um quadro que indica o consumo gasto em KWH nos últimos doze meses. A sua análise poderá, também, levar o aluno a perceber que o valor a ser pago não e proporcional ao consumo, quem consume o triplo não paga necessariamente o triplo, pois existem faixas de consumo: o valor de cada WKH que ultrapassar uma faixa será mais caro que cada KWH da faixa anterior.

Este momento é bastante adequado para um trabalho interdisciplinar, envolvendo, principalmente, as áreas de Ciências e Geografia analisando:

a) Como a energia elétrica é gerada nas Usinas Hidrelétricas;
b) As grandes Hidrelétricas do Brasil, indicando as produções e as regiões a quem atendem;
c) O impacto ambiental na região em que se constrói uma Usina Hidrelétrica;
d) A questão energética do Brasil.

Se você julgar interessante forneça aos alunos o anexo I que contem a explicação de como se lê um medidor de luz, e peça aos alunos que

acompanhem as leituras das pessoas que vão ler em suas casas os relógios de luz.

PARTE 2: DESCOBRINDO A RELAÇÃO.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo II-8.

DESENVOLVIMENTO:

Proponha inicialmente os problemas 1 e 2 abaixo.

1.- Seu Aquiles é o dono da padaria da esquina. Ele fez a seguinte tabela para indicar o preço a ser pago pela compra dos pãezinhos.

Nº de pães	1	2	3	5	7	10	15	20	25	40
Preço (R$)	0,14	0,28	0,42	0,70	0,98	1,40	2,10	2,80	3,50	5,60

a) Qual o preço de 4 pãezinhos? E de 39?
b) Quantos pães é possível comprar com R$ 6,58? E com R$ 4,14.
c) Se dobramos a quantidade de pães o preço também dobra?
d) Se chamarmos de “ x “ o número de pãezinhos e de “ p” o preço pago por eles, qual a expressão que relaciona “ p” e “ x “?

2.- A tabela abaixo apresenta as distâncias percorridas por um automóvel e o consumo correspondente a cada distância:

Distância percorrida d (km)	15	30	45	60	75
Consumo de gasolina C (ℓ)	2	4	6	8	10

a) Qual a distância que esse automóvel pode percorrer com 1 litro de gasolina? E com 3 litros?
b) Para percorrer uma distância de 90 km são necessários quantos litros de gasolina? E para 37,5 km?
c) De acordo com essa tabela se dobrarmos o número de litros a distância que poderá ser percorrida também dobra? E se triplicarmos a quantidade de litros?
d) Se precisarmos percorrer uma distância que é o dobro da outra, o número de litros de gasolina dobrará?
e) Qual é a expressão que relaciona "d" e "C"?
f) Represente graficamente a variação de "d" e "C", colocando "C" num dos eixos e "d" no outro.

Após a discussão dessas questões, distribua uma folha-tipo II-8 para cada aluno e solicite que, em pequenos grupos, discutam as questões propostas. Para a construção do gráfico sugira a utilização de uma folha de papel quadriculado de 1 cm x 1 cm ou de 0,5 cm x 0,5 cm.

Para estabelecer a relação entre s e t os alunos podem sentir dificuldades, faça-os, então, perceber que o quociente de s por t é sempre constante e igual a 8, (para $t \neq 0$), ou seja:

$$\frac{s}{t} = 8, \text{ ou seja } s = 8 \cdot t$$

PARTE 3: ANALISANDO A VARIAÇÃO.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo III-8.

DESENVOLVIMENTO:

Distribua uma folha-tipo III-8 para cada aluno. Após os alunos terem resolvidos as questões dos dois problemas propostos da folha-tipo, proponha os problemas abaixo:

1.- Seja um quadrado de lado ℓ e perímetro P

a) Complete a tabela:

L (cm)	0,5	1	1,5	2	2,5	3
P (cm)						

b) Escreva a equação que relaciona L e P.

c) Construir o gráfico cartesiano, colocando L no eixo das abscissas e P no eixo das ordenadas.

d) Um quadrado que tenha o lado igual ao dobro do lado de um outro, seu perímetro também será o dobro?

2.- É dado um quadrado de lado L e de área A.

a) Complete a tabela:

L (cm)	0,5	1	1,5	2	2,5	3
A (cm^2)						

b) Escreva a equação que relaciona L e A

c) Construir o gráfico cartesiano colocando L no eixo das abscissas e A no eixo das ordenadas.

d) Um quadrado que tenha o lado igual ao dobro de um outro, sua área também será o dobro?

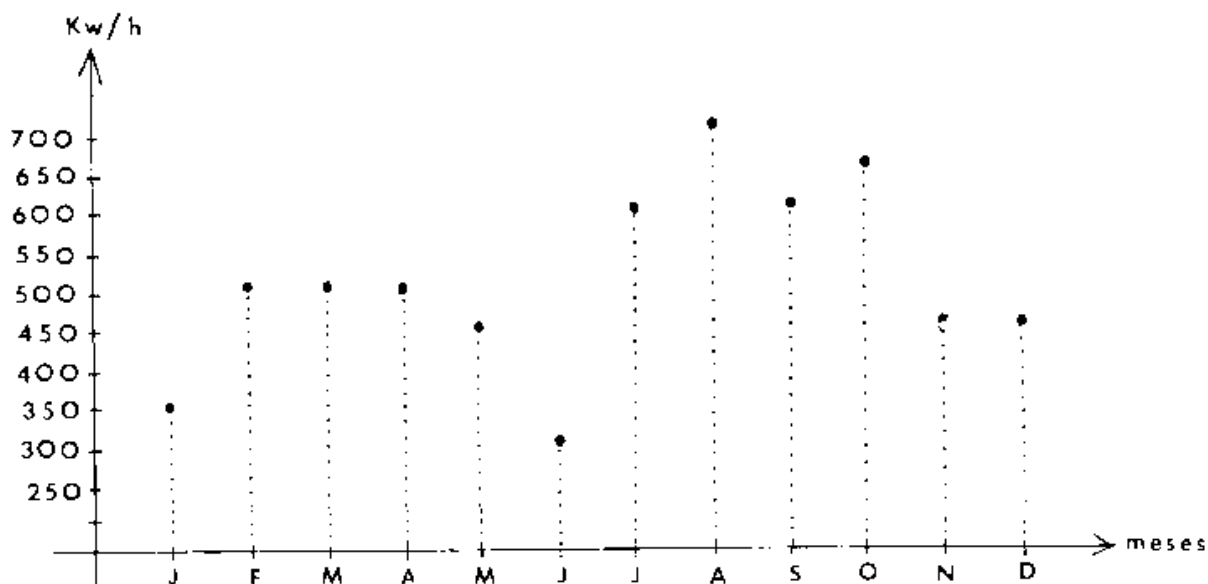
3.- Um motorista dirige seu automóvel por uma determinada estrada e num dado instante aciona um cronometro e anota as posições s dadas pelos marcos quilométricos nos instantes t. Com os dados registrados ele construiu a tabela:

t (h)	1	1,5	2	2,5	3
s (km)	50	70	90	110	130

a) Construir o gráfico de “s” por “t”, colocando s no eixo vertical e t no eixo horizontal.
b) Qual seria a posição do carro no instante t = 3,5 h? E no instante t = 0,5 h?
c) A partir do gráfico determine a posição do móvel no instante em que foi ligado o cronometro (t = 0)
d) Escreva a expressão que relaciona s e t.
e) Qual seria a posição do carro no instante t = 4 h 15 min. = 4,25 h?

FOLHA-TIPO I-8

As contas de luz de Paulinho.

O gráfico abaixo mostra o consumo de energia elétrica, em quilowatt-hora (KWH), da casa de Paulinho em determinado ano, mês a mês.

Analise o gráfico e responda as questões:

a) Qual foi o consumo de energia elétrica em maio? E em agosto?

b) Qual foi o mês em que se consumiu mais energia? E em qual se consumiu menos?

c) Houve meses consecutivos em que o consumo se manteve constante? Quais?

d) Em qual mês houve maior acréscimo de consumo de energia em relação ao mês anterior? De quanto foi este acréscimo?

e) Em qual mês houve o maior decréscimo de consumo em relação ao mês anterior? De quanto foi este acréscimo?

f) Qual foi a média do consumo de energia elétrica durante o ano na casa de Paulinho?

g) Paulinho anotou em uma tabela os valores das contas de luz, em reais, de junho a dezembro do referido ano.

FOLHA-TIPO I - 8a

Mês	Junho	Julho	Agosto	Setembro	Outubro	Novembro	Dezembro
Valor	400	1400	1600	1800	2000	2000	2500

Analisando o gráfico, Paulinho verificou que em dezembro o consumo de energia foi o mesmo de novembro, porem o valor da conta de dezembro, como mostra a tabela acima, foi maior. Ele não precisou pensar muito para descobrir a razão: o custo da energia aumentou e provavelmente a causa foi a desvalorização da nossa moeda – a inflação.

As questões abaixo mostram algumas dúvidas de Paulinho. Vamos ajudá-lo?

a) Em setembro consumiu-se menos energia elétrica que em agosto, mas apesar disso a conata de maio foi maior. Por quê?

b) Para você saber se em sua residência esta gastando mais energia em um mês que em outro, você deverá analisar apenas o valor a ser pago em reais? O que deverá ser analisado na conta de luz para esse fim?

c) Paulinho esta intrigado: em julho o consumo foi o triplo do consumo de junho e como nesses dois meses não houve aumento na tarifa do KWH, o valor da conta deveria ser o triplo, entretanto ultrapassou esse valor. Você saberia dizer porque? (analise uma conta de luz para responder a essa questão).

II) Construa um gráfico que indica o gasto de energia em KWH dos últimos doze meses de sua casa (como o de Paulinho). As contas de luz sempre trazem o consumo de energia elétrica dos últimos doze meses.

FOLHA-TIPO I – 8b

III) Faça uma pesquisa sobre o consumo de energia elétrica de alguns eletrodomésticos como rádio, TV, ferro de passar roupa, chuveiro, liquidificadores, máquinas de lavar, cafeteira, etc.

ANEXO I

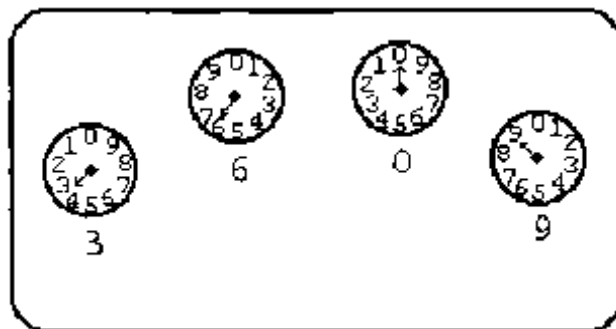
Relógios de luz.

Entre os vários motivos que existem para economizarmos energia elétrica, certamente o mais forte deles é seu custo. Ela é bastante cara no Brasil. Os reajuste da tarifa, freqüentemente, são maiores que a inflação.

Se aprendermos ler o medidor de luz teremos um maior controle do consumo de energia elétrica em nossas casas e podemos conferir a leitura das pessoas da Companhia de Eletricidade.

O medidor é composto de quatro “relógios”. A leitura deve ser feita, lendo os relógios da esquerda para a direita. O ponteiro de cada um dos relógios gira no sentido do menor para o maior algarismo, e devemos anotar o ultimo algarismo ultrapassado pelo ponteiro.

Em seguida subtraímos do numero encontrado o valor da leitura do mês anterior (ou o contrário se o anterior for maior). A diferença é o total de Quilowatt-hora consumido no mês em questão.

Um exemplo:

Como a leitura do mês anterior foi 4227, subtraímos 3609 de 4227 e obtemos um total de 618 KWH.

FOLHA-TIPO II – 8

Descobrindo a relação.

Você já deve ter reparado que as estradas possuem placas onde estão escritos números que aumentam ou diminuem quando nós nos deslocamos nela. Elas são denominadas de marco quilométricos e indicam a distância o marco inicial denominado zero. Nas estradas estaduais paulistas o marco zero esta localizado na Praça da Sé, na cidade de São Paulo. Assim, por exemplo, se você estiver no km 41 da via Anchieta, isto significa que você esta a 41 km da Praça da Sé.

Um ciclista, ao partir da Praça da Sé, aciona um cronômetro e conduz sua bicicleta para a Rodovia dos Imigrantes com destino ao Guarujá. Durante a viagem ele anota o tempo “t” e sua posição “s” fornecida pelos marcos quilométricos em que o mesmo se encontra. As anotações obtidas constam na tabela:

t (h)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
s (km)	0	4	8	12	16	20	24	28

a) Estabeleça a relação entre s e t

b) Construa um gráfico que represente a variação de s e t, representando no eixo horizontal e no eixo vertical as posições s do ciclista. (para facilitar utilize uma folha de papel quadriculado).

c) Se o ciclista mantivesse o tempo todo o mesmo ritmo, quanto tempo depois de sua partida ele passaria pelo marco 32 km? E pelo marco 48 km?

d) Com o mesmo ritmo, 4h30 min. Após sua partida em que marco quilométrico o ciclista estaria passando? E 6h depois?

FOLHA-TIPO II-8a

e) Quantos quilômetros esse ciclista anda em média durante uma hora?

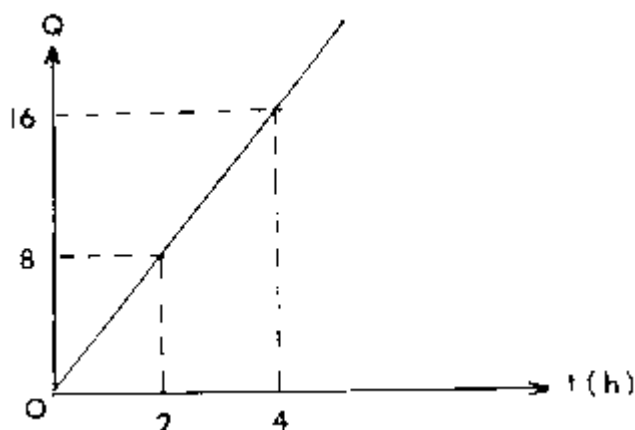
f) Qual seria a posição desse ciclista 2 h 15 min. Após sua partida? E 3 h 45 min.?

g) Em qual instante ele estaria passando pelo marco 10 km? E pelo marco 50 km?

h) Analisando o gráfico (ou tabela), ao se dobrar a distância o tempo também dobra? E se triplicarmos o tempo a distância percorrida também triplica?

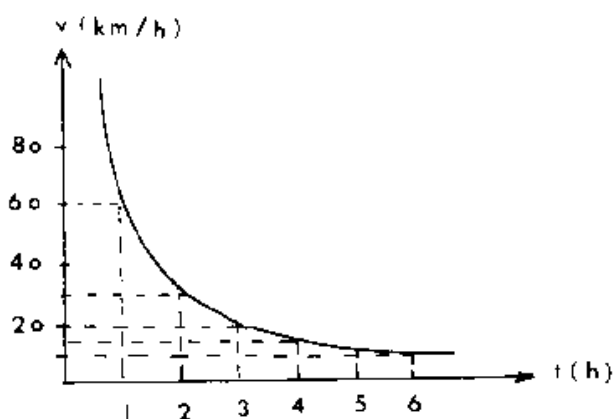
FOLHA-TIPO III-8

Analisando a variação.

1.- O gráfico abaixo representa a variação das quantidades Q de peças produzidas por uma máquina num certo período t de tempo:

a) Complete a tabela:

t (h)	2	4	3	5		10	
Q	8	16			28		48

b) Escreva a sentença matemática que relaciona Q e t.

2.- O gráfico seguinte representa as variações da velocidade de um veículo em função do tempo gasto para percorrer uma distância fixa.

FOLHA-TIPO III-8a

a) A partir do gráfico complete a tabela:

t (min.)	1	2	3	6		8		
V (km/h)	60	30			30		10	12

b) Se dobrarmos a velocidade, o tempo para percorrer uma dada distância também dobra?

c) E se reduzirmos a velocidade para um terço, qual deverá ser a variação do tempo para percorrer essa distância?

d) Para percorrermos a mesma distância na metade de um certo tempo como deverá variar a velocidade?

ATIVIDADE 9: GRANDEZAS PROPORCIONAIS.

OBJETIVOS: Identificar a natureza da variação de grandezas diretamente proporcionais , inversamente proporcionais ou não proporcionais.

Representar graficamente a variação de duas grandezas que variem proporcionalmente ou não e analisar o comportamento dessa variação.

PARTE 1: ANALISANDO A VARIAÇÃO.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo I-9.

DESENVOLVIMENTO:

Distribua uma folha-tipo I-9 para cada aluno e solicite que leiam o texto e respondam depois às questões da folha. Durante a análise das soluções encontradas é importante destacar:

1º) Na tabela I, quando A aumenta, B aumenta na mesma razão, isto é, o fator de variação (ou razão) de A ao passar de 1 para 2 é $\frac{2}{1}$ = 2 e o fator de variação de B nesse mesmo nível é também 2, pois $\frac{6}{3}$ = 2. Qualquer que seja o intervalo isto acontece. Outro exemplo: ao passar A de 1 para 3 o fator de variação é $\frac{3}{1}$ = 3 e o de B também é 3 pois $\frac{9}{3}$ = 3. Os alunos

Não terão dificuldade em perceber que $\frac{B}{A}$ = 2 ou B = 2.A e poderão concluir

que duas grandezas quaisquer X e Y só serão diretamente proporcionais se o quociente $\frac{X}{Y}$ = CONSTANTE.

2º) Na tabela II, quando p aumenta v diminui na mesma razão. Por exemplo, o fator de variação de p ao passar de 1 para 2 é $\frac{2}{1} = 2$ e o fator de variação de v no intervalo correspondente é $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. Isto acontece em qualquer intervalo dessa tabela. Outro exemplo: ao passar a grandeza p de 1 para 3 o fator de variação é 3, $\left(\frac{3}{1} = 3\right)$ e o v nesse intervalo é $\frac{1}{3}$, o inverso de 3, pois varia de 4 para 12, $\left(\frac{4}{12} = \frac{1}{3}\right)$. Não será difícil, portanto, o aluno perceber que a relação entre as grandezas p e v é p.v = 12. Assim podemos chegar à conclusão que duas grandezas X e Y são inversamente proporcionais se X.Y = constante.

3º) Na tabela III, verificamos que quando s aumenta, t também aumenta, porém não na mesma razão, isto é, ao passarmos s de 1 para 2 o fator de variação é $\frac{2}{1} = 2$ e o t no intervalo correspondente é diferente de 2 pois $\frac{5}{2} = 2{,}5$ ou seja $\frac{s}{t}$ não é constante. Isto significa dizer que s e t não são diretamente proporcionais. Essas grandezas também não são inversamente proporcionais porque o produto s.t não é constante. Elas são denominadas de não proporcionais. Estabelecer a relação entre s e t não é o principal objetivo do problema da tabela III, porém os alunos poderão encontrá-la ao verificar que t é o dobro de s acrescido de uma unidade: t = 2.s + 1.

4º) Procedendo da mesma maneira chega-se à conclusão que as grandezas r e u da tabela IV não são diretamente proporcionais e nem inversamente proporcionais. Encontrar a sentença matemática que relaciona

grandezas não proporcionais é tarefa bastante complicada para alunos de 1º grau.

PARTE 2: ANALISANDO GRÁFICOS.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo II-9.

DESENVOLVIMENTO:

Antes do trabalho com a folha-tipo II-9 proponha aos alunos o seguinte trabalho:

Análise os gráficos que você fez, propostos na folha-tipo I-9, e verifique o que têm em comum:

- Os gráficos de grandezas diretamente proporcionais.
- Os gráficos de grandezas inversamente proporcionais.

Assim espera-se que os alunos concluam que os gráficos de grandezas diretamente proporcionais são retas que "saem" da origem e os gráficos das grandezas inversamente proporcionais são de um tipo determinado de curva. Se você julgar necessário, informe-os que essa curva é denominada de hipérbole eqüilátera.

Após a tarefa proponha que analisem os gráficos da folha-tipo II-9 e indiquem os que representam grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais e não proporcionais.

PARTE 3: EXERCITANDO.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo III-9

DESENVOLVIMENTO:

Dê uma folha-tipo III-9 para cada aluno e peça inicialmente aos alunos para desenvolverem a parte A, classificando as grandezas das tabelas 1, 2 e 3 em diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais e construindo o gráfico cartesiano de cada variação e estabelecendo a relação entre as grandezas envolvidas.

Após esse trabalho, solicite que preencham as tabelas incompletas das partes B e C da folha-tipo III-9 a partir de sua análise.

O objetivo da parte 3 é proporcionar mais oportunidades aos alunos para vivenciarem os conceitos tratados nas atividades anteriores.

Novos problemas envolvendo variação de grandezas serão tratados na atividade 10, na qual será mais sistematizada a "regra de três", inclusive a "regra de três composta", pois será vista a relação de dependência entre três ou mais grandezas.

PARTE 4: MAIS PROBLEMAS.

MATERIAL NECESSÁRIO: Nenhum.

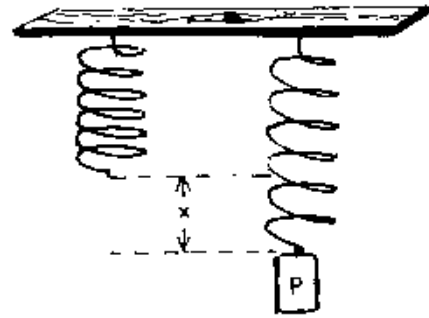
DESENVOLVIMENTO:

Proponha os problemas seguintes, um a um, aos alunos.

1.- Em cada uma das situações seguintes há a variação de duas grandezas envolvidas. Classificar estas relações de dependência em diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais:

a) A idade de uma pessoa e seu peso.
b) A idade de uma pessoa e sua altura.
c) Numero de pãezinhos comprados e o preço para por eles.
d) Numero de maçãs compradas e o preço pago por elas.
e) O lado de um quadrado e seu perímetro.
f) Lado de um quadrado e a medida da diagonal.
g) O lado de um quadrado e sua área.
h) O salário de um funcionário e seu tempo de serviço na firma.
i) O tempo e a velocidade de um carro para percorrer uma dada distância.
j) A massa de uma substância e seu volume.

2.- Em uma mola não deformada com a extremidade superior fixa, como a da figura abaixo, colocou-se, sucessivamente, em sua extremidade livre corpos de diferentes pesos que provocaram deformações distintas na mola. Um corpo de peso P provoca na mola uma deformação x. A tarefa mostra como variou a deformação x da mola para diferentes valores de P:

P (kgf)	x (cm)
0,4	1,0
0,8	2,0
1,2	3,0
1,6	4,0

a) Verifique se P e x são diretamente proporcionais.
b) Num papel quadriculado construa um gráfico que mostra a variação as duas grandezas.
c) Se colocássemos um peso de 2,0 kgf qual seria a deformação da mola? E se colocássemos 3,0 kgf?
d) Escreva uma equação que representa a relação entre P e x.

3.- No momento em que um veículo passa no marco quilométrico 240 km de uma estrada seu motorista aciona um cronômetro e caminha em sentido da origem da estrada (marco zero). A tabela abaixo, indica as posições s desse em relação ao marco zero veículo em função do tempo t:

t (h)	(km)
0	40
0,5	10
1,0	80
1,5	50

a) Após quanto tempo após a partida ele atinge o marco zero?
b) S e t são diretamente proporcionais?

c) Construir no papel quadriculado o gráfico que mostra a variação de s em função de t.
d) Tente estabelecer expressão que relaciona s com t.

Na análise das soluções dos itens c) e d) discuta com a classe os seguintes pontos:

* Quando compramos pãezinhos na padaria, pagamos quase sempre um preço diretamente proporcional ao numero de pães que levamos, pois raramente há descontos neste tipo de mercadoria.

* Entretanto, o preço pago pelas maças pode não ser diretamente proporcional ao número de maçãs mesmo quando são vendidas por unidade e não por quilo, pois os feirantes fazem descontos para vender mais rapidamente sua mercadoria. Por exemplo, é comum, nas feiras livres, ver os preços assim enunciados: “ 3 maçãs por R$ 1,00 e 6 por R$ 1,50.

Para resolver, por exemplo, o item f) do problema 1 eles poderão construir uma tabela, com as medidas obtidas de vários quadrado que foram construídos, e decidir se as grandezas envolvidas – medidas do lado e da diagonal – são diretamente, inversamente ou não proporcionais. O mesmo pode ser feito para o item e).

Para constatar que a massa de uma substância é diretamente proporcional ao seu volume (item j) eles poderão consultar um livro de Ciências, no caso de haver impossibilidade de verificar praticamente este fato. A relação massa/volume de uma substância é constante e é denominada de densidade.

Informe aos alunos que a unidade de peso do problema 2, quilograma-força (kgf), é a unidade que normalmente utilizamos no nosso cotidiano, apesar de dizermos, erroneamente, quilograma (kg), que é unidade massa e não de peso. Um corpo que tenha massa de 60 kg tem na superfície terrestre (ou próxima dela) peso de 60 kgf. Na lua, por exemplo, a massa desse corpo continuará valendo 60 kg enquanto que o peso será um valor bem menor que 60 kgf (aproximadamente 6 vezes menor).

PARTE 5: EXPERIMENTANDO PARA RESPONDER.

MATERIAL NECESSÁRIO: Um recipiente cilíndrico com capacidade de 4 ou mais litros, e um outro recipiente de volume 1 litro e folha-tipo IV-9.

DESENVOLVIMENTO:

Se você optar em realizar esta atividade em classe solicite alguns dias antes o material necessário para que os alunos possam arrumar, em tempo, os recipientes.

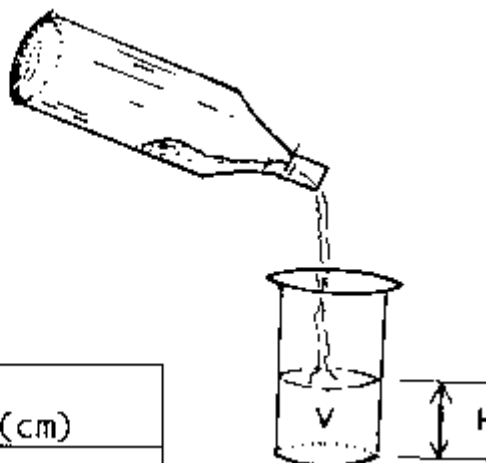
Entregue a folha-tipo IV-9 para cada aluno e peça que em pequenos grupos realizem a experiência e respondam às questões propostas na folha.

Deseja-se que os alunos concluam que V e h, para recipientes cilíndricos , são diretamente proporcionais e que representem no plano cartesiano a variação de h em função de V.

Na apresentação dos resultados dos grupos pergunte à classe porque as expressões matemáticas que encontraram para relacionar V e h não

são iguais. Assim, eles podem concluir que não obtiveram a mesma expressão porque os recipientes têm a área da base diferentes.

Pode-se obter mais valores para V e h se os alunos utilizarem um recipiente de 0,5 ℓ = 500 mℓ para colocar a água no recipiente cilíndrico:

V (ℓ)	h (cm)
0,5	
1,0	
1,5	
2,0	
2,5	
3,0	

Finalmente proponha à classe as seguintes questões:

a) Se os recipientes usados tivesse a forma de um paralelepípedo h e V seriam diretamente proporcionais?

b) Dê exemplos de alguns recipientes em que h e V não sejam diretamente proporcionais.

FOLHA-TIPO I-9

Analisando a variação.

Quando uma grandeza varia em função de uma outra podem ocorrer alguns tipos de interdependência:

- Ao dobrar uma grandeza a outra também dobra, ao reduzir uma à terça parte a outra também fica três vezes menor, ao quintuplicar uma delas o mesmo acontece à outra etc. Grandezas que tem esse tipo de comportamento são chamadas de diretamente proporcionais.
- Ao dobrar uma grandeza a outra se reduz à metade, ao reduzir uma à terça parte a outra fica triplicada, ao quintuplicar uma delas a outra se reduz à quinta parte etc. Grandezas que se relacionam deste modo são chamada de inversamente proporcionais.

As tabelas abaixo representam variações de duas grandezas:

a) Complete as tabelas, analisando o comportamento das grandezas, e classificando-as em diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou em não proporcionais.

b) Construa o gráfico cartesiano correspondente a cada uma dessas tabelas.

I)

A	1	2	3	4	5	6
B	2	4	6	8		

FOLHA-TIPO I-9a

II)

p	1	2	3	4	5	6
v	12	6	4		2,4	

III)

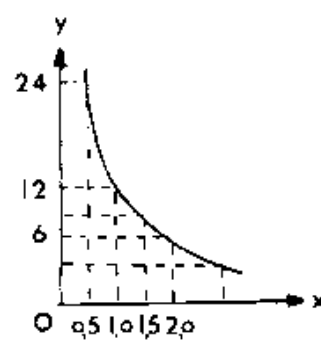
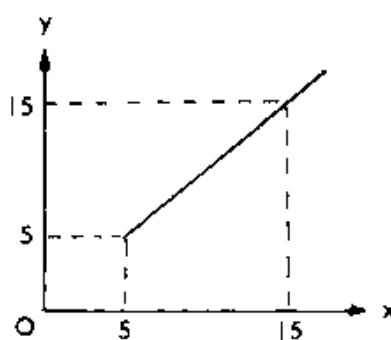
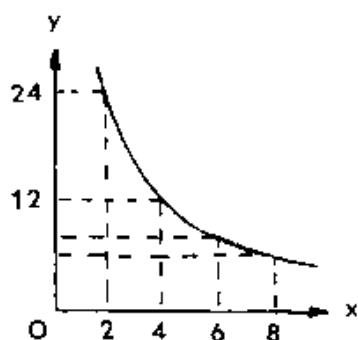
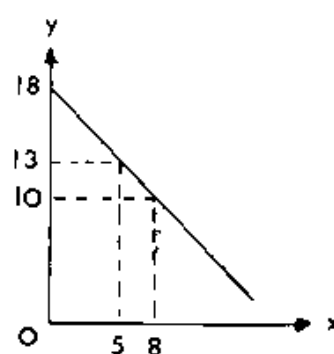
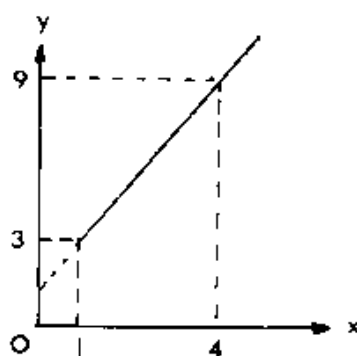
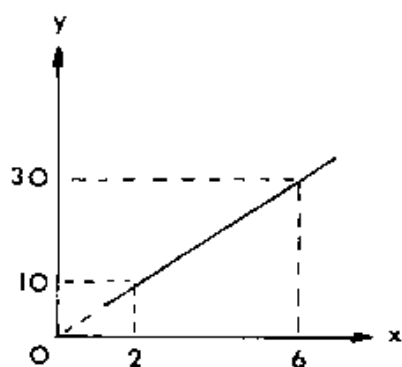
f	1	2	3	4	5	6
t	3	5	7	9		

IV)

f	1	2	3	4	5	6
r	30	27	24	21		

FOLHA-TIPO II-9

Analisando gráficos.

Analise cada um dos gráficos abaixo e classifique as grandezas envolvidas em diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais.

FOLHA-TIPO III-9

Exercitando.

A) Cada uma das tabelas abaixo mostra a relação de dependência entre as duas grandezas. Classifique essas dependências, construa os gráficos cartesianos e escreva a expressão que relaciona essas grandezas:

I)

x	1	3	5	7
y	1,5	4,5	7,5	10,5

II)

x	2	4	6	8
y	3	7	11	15

III)

x	2	3	4	5
y	12	8	6	4,8

B) Complete as tabelas abaixo, sabendo que x e y são diretamente proporcionais:

I)

x	2	4	10
y	6		

II)

x		12	24
y	8		32

I II)

x	5/8		18
y	20	9/5	

IV)

x	4,5		1,5
y	60	36	72

C) Complete as tabelas abaixo, sabendo que x e y são inversamente proporcionais:

I)

x	2	4	10
y	6		

II)

x		12	24
y	8		32

III)

x		60	4/3
y	2/3		9/2

IV)

x	1,5	60	0,5
y		18	

FOLHA-TIPO IV-9

Experimentando para responder.

O volume V de um líquido colocado em um recipiente cilíndrico e o nível h que este líquido atinge no recipiente são diretamente proporcionais? Por quê? Para responder a esta questão você pode fazer a seguinte experiência:

1) Arrume um recipiente cilíndrico que tenha capacidade de 4 ou mais litros e um outro recipiente que tenha capacidade de 1 litro.
2) Com o recipiente de 1 litro (ℓ) despejar água no recipiente cilíndrico e medir com uma régua a altura atingida pelo liquido, determinando o valor de h para V = 1 ℓ. Em seguida, despejar mais 1 litro e obter o valor de h para V = 2 ℓ e assim sucessivamente até encher todo o recipiente. Você poderá despejar água de 0,5 em 0,5 ℓ para obter mais valores para h e V.
3) Preencha a tabela e depois responda as questões abaixo:

V (ℓ)	1	2	3	4		
h (cm)						

- h e V são diretamente proporcionais? Por quê?
- Como será o gráfico cartesiano V x h? Por quê?
- Estabeleça a relação entre V e h.
- Construa o gráfico cartesiano V x h, colocando V no eixo da horizontal e h no vertical.

ATIVIDADE 10: REGRA DE TRÊS.

OBJETIVO: Aplicar a regra de três simples ou composta na resolução de situações-problemas.

PARTE 1: QUAL É O QUARTO?

MATERIAL NECESSÁRIO: Nenhum.

DESENVOLVIMENTO:

Proponha, inicialmente, à classe o seguinte problema:

> O automóvel do pai de Paulinho percorre a distância de 11 km com apenas 1 litro de gasolina. Quantos litros, então, serão necessários para se fazer uma viagem de 110 km?

No levantamento das soluções apresentadas pelos alunos discuta as seguintes questões:

* quanto maior for a distância a ser percorrida maior é o consumo de combustível pelo automóvel;

* que o consumo de combustível deve ser diretamente proporcional à distância percorrida: se com uma quantidade x de combustível percorre-se uma distância d, com uma quantidade 2.x percorre-se a distância 2.d, com uma quantidade 3.x pode-se percorrer a distância 3.d, etc. - isto, se o automóvel permanecer com a velocidade constante e as condições de tráfego não se modificarem.
* que a distância a ser percorrida, 110 km, é 10 vezes maior que a distância possível de se percorrer com 1 litro de gasolina : 11 km; conclui-se, então, que o consumo é também 10 vezes maior: 1 x 10 = 10 litros.

Após esta discussão acrescente a seguinte pergunta ao problema:

Então, para fazer uma viagem de 495 km com o carro do pai de Paulinho, quantos litros de gasolina seriam necessários?

Provavelmente, os alunos terão um pouco mais de dificuldade para responder essa pergunta, pois a razão entre 495 e 11 não é tão evidente quanto é a razão entre 110 e 11. Na apresentação das soluções encontradas pelos alunos, discuta, a utilização de frações equivalentes:

$$\frac{11}{1} = \frac{22}{2} = \frac{33}{3} = \dots \frac{110}{10} = \dots = \frac{495}{?}$$

Após a resolução de problema considere com a classe as vantagens de se construir uma tabela para melhor organizar os dados

distância (km)	consumo (litros)
11	1
495	x

Os alunos poderão preencher a tabela como fizeram na atividade Grandezas Proporcionais:

- Analisando se as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais e concluindo, portanto, que o fator de variação entre as distâncias (ou a razão entre elas) é igual ao do combustível.
- Verificando que 495 : 11 = 45, determina-se x = 45 pois x : 1 também é igual a 45.
- Concluindo, também que a razão entre as grandezas também será constante e que neste problema qualquer que seja a distância d percorrida, o número x de litros de combustível gasto será tal que $\frac{d}{x} = 11$, (pois $\frac{11}{1} = 11$) e
  Determina-se a solução do problema pela sentença:
  $\frac{495}{x} = 11$, encontrando x = 45

Em seguida, proponha, também, o seguinte registro para a resolução desse problema:

11 km	1 litro	ou	495 km	x litros
495 km	x litros		11 km	1 litro

$$\frac{11}{495} = \frac{1}{x} \quad \text{ou} \quad \frac{495}{11} = \frac{x}{1}$$

Pela equivalência de frações os alunos podem escrever:

$$11 \cdot x = 495 \quad \text{ou} \quad x = \frac{495}{11} = 45$$

Caso ainda não conheçam o termo proporção, introduza-o como uma equivalência de frações (ou razões). Explique, também, o porquê do nome de “regra de três”: na proporção tem-se 3 elementos conhecidos e deseja-se descobrir o 4º.

PARTE 2: REGRA DE TRÊS SIMPLES.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo I-10.

DESENVOLVIMENTO:

Inicialmente proponha aos alunos resolverem os três problemas da parte A da folha-tipo I-10.

Os dois primeiros tratam de grandezas diretamente proporcionais, enquanto que as grandezas envolvidas no 3º problema são inversamente proporcionais. Para este último problema, se a quantidade de linhas para escrever um texto cair para a metade o número de páginas necessárias será o dobro. Se triplicarmos o numero de linhas o número de páginas passará a ser um terço, etc. Assim, eles podem perceber que o produto de quantidade de páginas pelo números de linha em cada página para escrever o

texto deve ser constante e igual a 810m pois 30 x 27 = 810. Para determinar x eles deverão, então, dividir 810 por 45 porque x.45 = 810.

Entretanto, escrever a proporção que traduz esses problema pode favorecer a resolução do mesmo.

30 páginas	27 linhas em cada página
45 páginas	x linhas em cada página

Escrevendo a proporção teríamos:

$$\frac{30}{45} = \frac{1}{\frac{27}{x}} \quad \text{(pois são inversamente proporcionais)}$$

Logo:

$$\frac{30}{45} = \frac{x}{27} \quad \text{ou } 45.x = 30 . 27 \quad \text{ou } x = \frac{810}{45} \quad \text{ou } x = 18$$

Assim, para datilografar o texto serão necessárias 18 páginas.

Após a discussão dos três problemas da parte A peça aos alunos que resolvam os problemas da parte B da folha-tipo I-10.

PARTE 3: REGRA DE TRÊS COMPOSTA.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo II-10.

DESENVOLVIMENTO:

Coloque na lousa o problema abaixo e peça que os alunos o discutam em grupos.

Um texto de 4800 palavras é escrito em 18 páginas, com 30 linhas cada página. Quantas páginas são necessárias para escrever 3600 palavras?

Antes da discussão, explique à classe que o valor a ser encontrado será uma aproximação, uma vez que as palavras têm diferentes quantidades de letras. Mas estaremos considerando que em média cada linha terá o mesmo número de palavras, logo a aproximação deverá ser bastante satisfatória.

Provavelmente, os alunos terão dificuldade para resolver uma situação problema que envolve a variação de mais de duas grandezas, porém, a intenção é mesmo levantar essas dificuldades. Antes de sua atuação mais efetiva no esclarecimento delas, distribua a folha-tipo II-10 para cada aluno na qual consta uma resolução do problema. Peça, ainda, que em grupos discutam a solução apresentada. Tente esclarecer as dúvidas dos alunos e justificar a resolução da folha somente após essa discussão.

Proponha, então, que eles resolvam o mesmo problema, porém fazendo variar na situação intermediária o número de palavras e mantendo constante o número de linhas por páginas e depois variar o número de linhas mantendo constante o número intermediário de páginas (ao contrário da resolução da folha-tipo II-10). Os dados do problema poderão ser melhores compreendidos se dispostos em uma tabela:

	nº de palavras	nº de linhas/pág.	nº de pág.
situação conhecida	4800	30	18
situação intermediária mantendo uma grandeza constante	3600	30	z
situação pedida	3600	27	x

PARTE 4: USANDO A REGRA DE TRÊS

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo III-10.

DESENVOLVIMENTO:

Os alunos deverão discutir e resolver inicialmente o problema 1 da parte A da folha-tipo III-10; somente após o esclarecimento de dúvidas é que se proporá o 2º da folha; esses dois problemas têm tabelas sugerindo a grandeza a se manter constante na "situação intermediária".

Se você julgar adequando, após a resolução desse problemas, pode-se introduzir nesse momento, a técnica para resolver mais rapidamente a "regra de três composta". Para isto, o aluno poderá verificar a propriedade: "se uma grandeza é proporcional a várias outras, então ela é proporcional ao produto dessas outras". Assim eles podem utilizar essa propriedade para resolver novamente o problema da folha-tipo II-10 sem a "situação intermediária".

	nº de palavras	nº de linhas/pág.	nº de pág.
situação conhecida	4800	30	18
situação procurada	3600	27	x

Podemos escrever as proporções:

1) $\frac{18}{x} = \frac{4800}{3600}$

(considerando que o número de páginas é diretamente proporcional ao número de palavras)

2) $\frac{18}{x} = \frac{1}{\frac{30}{27}}$ ou $\frac{18}{x} = \frac{27}{30}$

(considerando que a quantidade de páginas é inversamente proporcional ao número de linhas por páginas).

Então:

$\frac{18}{x} = \frac{4800}{3600} \cdot \frac{27}{30}$ ou $4800 \cdot 27 \cdot x = 18 \times 3600 \times 30$

Logo x = 15 pág.

Após esse trabalho, proponha aos alunos os problemas da parte B da folha-tipo III-10. Para isto, chame a atenção sobre a conveniência de transformar em horas os dados dos problemas 3 e 4 que estão expressos em minutos. Assim:

2 h 30 min. = 2,5 h $\left[2 \text{ h } 30 \text{ min.} = 2 \text{ h} + \frac{30}{60} = 2{,}5 \text{ h} \right]$

1 h 12 min. = 1,2 h $\left[1 \text{ h } 12 \text{ min.} = 1 \text{ h} + \frac{12}{60} \text{ h} = 1,2 \text{ h} \right]$

Evidentemente este tema não se esgota aqui. Deve-se criar muitos outros momentos em que se possa retomar este assunto. Ainda nesta série, haverá duas outras atividades que retomará este tema: uma sobre divisão em partes proporcionais e a outra sobre matemática comercial.

FOLHA-TIPO I-10

Regra de três simples.

PARTE A:

Para resolver os três problemas seguintes, analise se as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais. A tabela após cada problema, organiza os dados e poderá auxiliar você a verificar a natureza da variação das grandezas envolvidas.

1.- Com 100 kg de trigo pode-se obter 70 kg de farinha. Quantos kg de trigo são necessários para fabricar 175 kg de farinha ?

quantidade de trigo (kg)	quantidade de farinha (kg)
100	70
x	175

2.- Em uma gincana a cada 3 tarefas cumpridas cada equipe ganha 100 pontos. Se a equipe conseguiu totalizar 450 pontos, qual o total de tarefas cumpridas?

número de tarefas	3	x
número de pontos	100	450

3.- Para datilografar certo texto foram utilizados 30 páginas, cada uma delas com 27 linhas. Para datilografar o mesmo texto em 45 páginas seriam necessárias quantas linhas por páginas?

números de páginas	números de linhas por páginas
30	27
45	x

PARTE B:

Para resolver cada um dos problemas abaixo construa uma tabela como as do problema da parte A, para organizar os dados.

1.- Cinco máquinas impressoras, trabalhando simultaneamente executam um determinado serviço em 15 horas. Em quanto tempo o mesmo serviço seria executado se fossem utilizados apenas três máquinas impressoras?

FOLHA-TIPO I-10a

2.- O preço de 1 kg. de carne custa R$ 7,50. Quanto dessa carne pode-se comprar com R$ 40,50?

3.- Um automóvel com velocidade de 80km/h demora 27 minutos para ir de uma cidade à outra. Para percorrer essa mesma distância em 18 minutos qual deve ser a velocidade do automóvel?

4.- Uma industria necessita 9 operários para fazer um determinado serviço em 8 dias. Para fazer esse mesmo serviço em 6 dias quantos operários serão necessários? Considere que a produção deles seja a mesma.

5.- Em setembro de 1993, 75 dólares valiam R$ 810,00. Nessa ocasião qual era o valor de 543 dólares? Quantos dólares seriam comprados com R$ 3.510,00?

6.- Em um mapa a distância entre 2 cidades é de 2,5 cm. Sabendo que a escala usada é de 1:1 000 000, qual é a distância real entre elas? Qual deve ser a distância nesse mapa equivalente a uma distância real de 100 km?

7.- Uma fábrica dispõe de 4 máquinas. Quando funciona apenas 3 máquinas uma certa produção leva 30 dias para ser obtida. Em quanto tempo a fabrica tem essa mesma produção se funcionarem as 4 máquinas?

FOLHA-TIPO II-10

Regra de três composta.

Você resolveu problemas envolvendo duas grandezas (ora diretamente proporcionais, ora inversamente proporcionais). E os problemas que tratam de três ou mais grandezas? Como resolvê-los?

Considere a seguinte situação:

> Um texto de 4800 palavras é escrito em 18 páginas, cada uma delas com 30 linhas. Aproximadamente quantas páginas seriam necessárias para datilografar um texto de 3600 palavras de modo que cada página tivesse 27 linhas?

Se mantivéssemos constante o número de palavras, qual seria o número de páginas cessarias? (Lembre-se que o número de páginas é inversamente proporcional ao número de linhas por páginas para escrever um texto). Esse valor que chamaremos de "intermediário" foi assim calculado:

	nº de palavras	nº de linhas/pág.	Nº de pág.
situação conhecida	4800	30	18
situação intermediária mantendo uma grandeza constante	4800	27	y

$\frac{30}{27} = \frac{y}{20}$ ou $27 . y = 30 . 18$ ou $y = \frac{540}{27}$ ou $y = 20$ pág.

Vamos manter, agora, constante o número de linhas por páginas – 27 – pedido no problema e determinar o número de páginas para escrever as 3600 palavras.

	nº de palavras	nº de linhas/pág.	nº de pág.
situação conhecida	4800	27	20
situação intermediária mantendo uma grandeza constante	3600	27	x

$\frac{4800}{3600} = \frac{20}{x}$ ou $4800 . x = 3600 . 20$ $x = \frac{72000}{4800}$ ou $x = 15$

FOLHA-TIPO III-10

Usando a regra de três.

PARTE A:

1.- Duas torneira despejam 2,4 m^3 de água (2.400 litros) em 4 horas. Quantas horas serão necessárias para que 6 dessas torneiras despejem 7200 litros de água?

	volume (litros)	torneiras	Tempo (horas)
situação fornecida	2400	2	4
situação intermediária	7200	2	y
situação procurada	7200	6	x

2.- Em uma industria 6 máquinas trabalhando 8 dias produzem 720 peças. Para que 4 dessas máquinas produzam 360 peças quantos dias seriam necessários?

	nº de máquinas	nº de peças	nº de dias
situação fornecida	6	720	8
situação intermediária	4	720	y
situação procurada	4	360	x

PARTE B:

Os problemas seguintes envolvem a variação de 2, 3 ou 4 grandezas. Monte uma tabela como as dos problemas da parte A para facilitar a resolução.

1.- Uma creche que possui 36 crianças consome 1620 pães em 15 dias. Se a creche receber mais 12 crianças quantos pães serão necessários para o consumo de um mês?

2.- Uma indústria de tecido tem 5 máquinas que trabalhando 12 horas por dia produz 450 m de tecido. Quantas máquinas são necessárias para produzir em 4 h, 300 m de tecidos?

FOLHA-TIPO III-110a

3.- Uma pessoa datilografa 6 folhas de 45 linhas em 2 h 30 min. Qual o tempo necessário para datilografar 10 folhas de 42 linhas cada uma se o datilógrafo mantém o mesmo “ritmo”?

4.- Um carro com velocidade de 45 km/h percorre a distância de 13,5 km em 18 min. Qual a velocidade necessária para este carro percorrer a distância de 54 km em 1h 12 min.?

5.- Uma industria possui 12 máquinas e trabalhando 10h diárias produz 7200 peças em 6 dias. Quantos dias seriam necessários para se produzir 4800 peças com apenas 8 máquinas trabalhando 6h diárias?

6.- em 4 horas, 6 torneiras lançam 12 m^3 de água em uma piscina.

a) Em 3 horas, que volume de água essas mesmas 6 torneiras lançam na piscina?

b) Em 3 horas, que volume 4 dessas torneiras lançam na piscina?

7.- Tirei nota 5 em uma prova que valia 8. Qual seria minha nota se a prova valesse 6? E se valesse 10?

8.- Um automóvel com uma velocidade média de 50 km/h levou 4 dias para chegar ao seu destino, rodando 9 horas por dia. Se este carro desenvolvesse uma média de 75 km/h durante 6 horas diárias, quantos dias duraria a viagem?

ATIVIDADE 11: FIGURAS E SOMBRAS.

OBJETIVOS: Identificar experimentalmente, propriedades de transformações de figuras que caracterizam a afinidade e a projetividade.

PARTE 1: SOL E LÂMPADA.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo I-11.

DESENVOLVIMENTO:

Entregue a cada aluno, com antecedência de pelo menos uma semana, a folha-tipo I-11, que contém um roteiro de observações. Marque o dia em que os alunos irão debater suas conclusões a respeito dessas experimentações.

I) Com relação aos lápis, levante questões do tipo:

- As sombras dos dois lápis, variaram em função de terem sido iluminadas pelo Sol ou pela lâmpada?
- Houve mudanças em função do horário de observação, com relação à luz solar?
- E qual foi a influência da posição da lâmpada?

Destaque que em ambos os casos, uma "reta" teve como sombra uma outra "reta". Pergunte se isso sempre ocorre e indague o que acontece se colocarmos o lápis em frente a uma panela de aço inoxidável: a imagem refletida será sempre reta? Ou pode ser curva?

Em Matemática, essas “transformações”, em que retas se transformam em retas, são chamadas PROJETIVIDADE.

II) Com relação a tela de arame, exposta ao Sol pergunte:

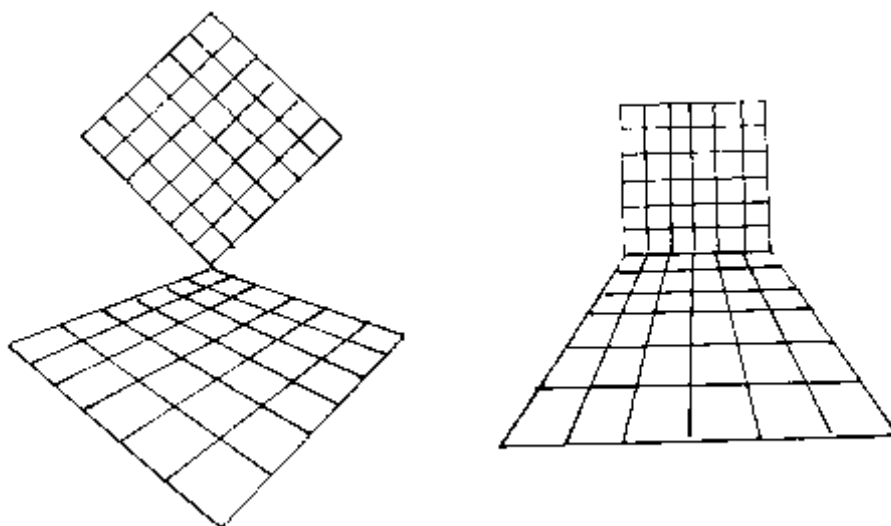
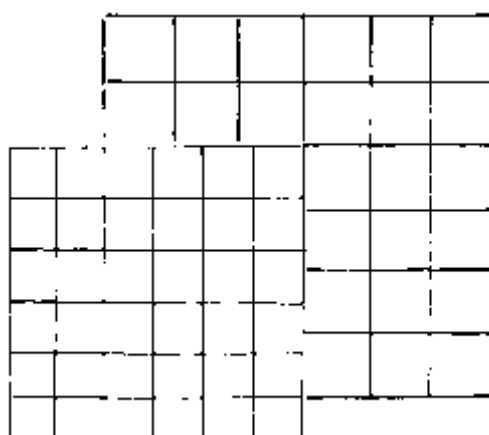
- A forma e o tamanho da sombra variam de acordo com o horário em que a observação é feita? De que modo?
- Foram observadas sombras retangulares? Em forma de paralelogramo? Em forma de losango? E em forma de trapézio?

Em todas as observações feitas à luz do Sol, deve-se evidenciar que retas paralelas na tela, continuam paralelas na sombra. Ao quadrado, sempre corresponderam sombras com lados paralelos dois a dois. Além disso, se o lado de cada quadradinho corresponde a $\frac{1}{6}$ do lado da tela, essa proporção se repete na sombra. Também, se a área de cada quadrinho corresponde a $\frac{1}{36}$ da área total da tela, o mesmo acontece quando comparamos essas áreas na sombra.

No caso da posição b), ao meio dia, a sombra e a tela são praticamente idênticas.

III) Com relação à tela exposta à luz de uma lâmpada, questione:

- A forma e o tamanho da sombra variaram em função de quê? O que se observa quanto mais longe fica a lâmpada da tela?
- Que tipos de sombras foram observadas? Eram sempre paralelogramos?

Nas diferentes observações, os alunos deverão perceber que ao quadrado na tela não correspondem mais um paralelogramo, mas um quadrilátero qualquer (trapézios). Também não se mantém sempre a proporcionalidade de segmentos, nem de áreas.

É possível obter, com a luz da lâmpada, uma imagem num plano paralelo ao da tela, de modo que a imagem seja semelhante ao objeto.

Solicite aos alunos que comparem as imagens da tela nesta situação descrita acima e naquela em que a tela é exposta ao Sol ao meio-dia, na posição b). Não adiante ainda as denominações "congruências" e "semelhanças", mas explore o que têm em comum e o que têm de diferente.

Essas transformações que observamos à luz da lâmpada, em que a única propriedade que se mantém sempre, é a de que, às PROJETIVIDADE. Já as transformações que, além disso, também conservam o paralelismo são chamadas "afinidade". Assim, portanto, as afinidades são casos particulares das "projetividades". Essas denominações não precisam ser dadas aos alunos, mas apenas basta observar propriedades.

PARTE 2: TRIÂNGULOS, RETÂNGULOS E CÍRCULOS.

MATERIAL NECESSÁRIO: Arame para fabricação de figuras.

DESENVOLVIMENTO:

Solicite aos alunos que formem grupos de 3 elementos e que cada um construa, respectivamente, um triângulo eqüilátero, um retângulo e uma circunferência, de arame, que serão observados ao Sol, em diferentes horários.

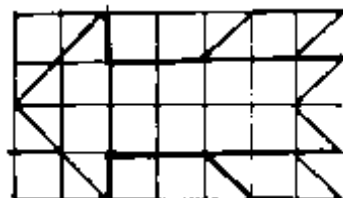
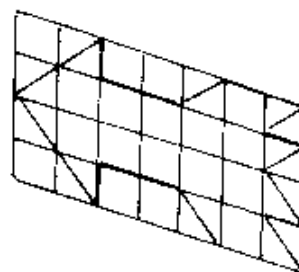
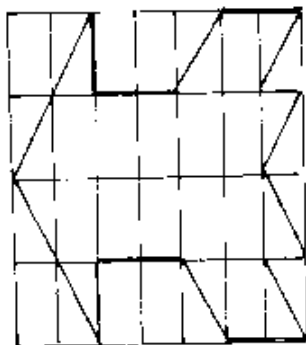
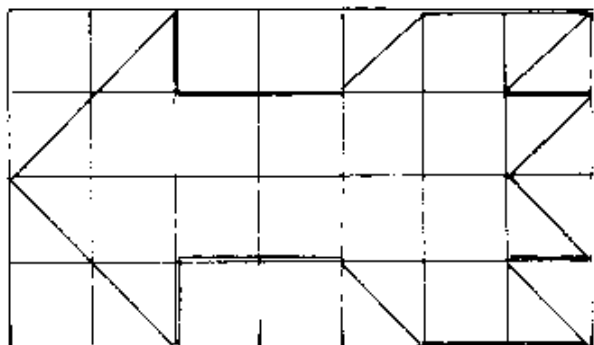
Oriente os alunos para que desenhem as sombras, marquem pontos e façam medidas para responder às seguintes perguntas.

- A sombra do triângulo eqüilátero é sempre um triângulo eqüilátero?
- A sombra de uma mediana qualquer do triângulo, continua sendo mediana do “triângulo sombra”?
- Ao baricentro (encontro das medianas) do triângulo podemos fazer corresponder ao baricentro do “triângulo sombra”?
- A sombra do retângulo pode ser um trapézio?
- A sombra de uma diagonal do retângulo, o que corresponde?
- E o que ocorre com a sombra do ponto de encontro das duas diagonais do retângulo?
- O que acontece com a sombra do círculo?
- O que se pode associar ao centro do círculo, em sua sombra?

PARTE 3: PUXA E ESTICA.

MATERIAL NECESSÁRIO: Um pedaço de elástico de 5 cm de largura, ou de borracha (esticável).

DESENVOLVIMENTO:

Solicite a cada aluno que desenhe, com esferográfica no pedaço de elástico ou de borracha, uma figura como esta:

Em seguida, transformarão essa figura (esticando em diferentes direções) e farão o desenho do resultado, para observar as características da figura em cada transformação.

Dentre as transformações, eles deverão descobrir uma em que as medidas dos ângulos da figura, sejam preservadas.

Para completar esta atividade, proponha à classe uma pesquisa sobre a vida e a obra de Tales de Mileto, cujas descobertas têm muito a ver com as sombras.

Se houver possibilidade, exiba o vídeo da série História da Matemática exibido pelo programa TV-Escola, na RTC.

FOLHA-TIPO I-11

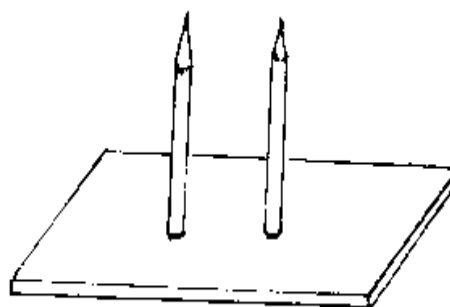
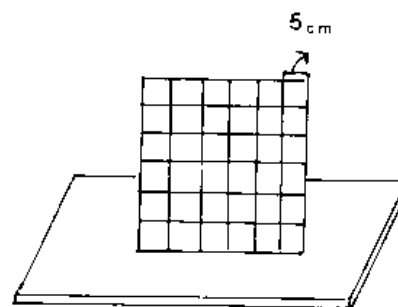
Figuras e sombras.

1.- Coloque dois lápis e coloque-os na posição vertical, sobre uma tábua, usando um pouco de cola para fixá-los:

Observe a sombra desses lápis:

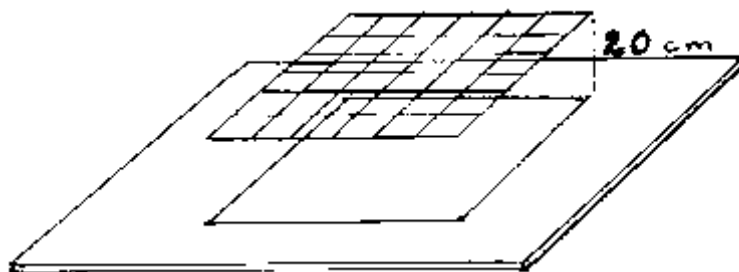
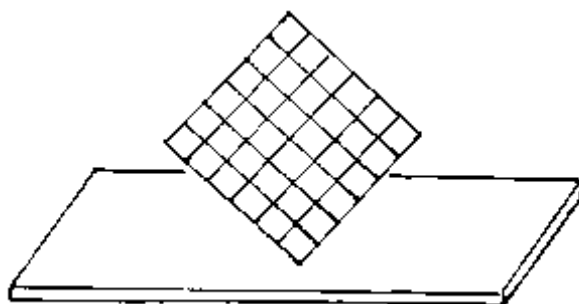
a).- Sob a iluminação da luz do Sol, em diferentes horários, num dia de Sol (é claro!)

b).- Sob a iluminação de uma lâmpada em diferentes distâncias da mesma e em diferentes localizações.

Anote os resultados de suas experimentações. Faça desenhos que as representem.

2.- Faça uma tela de arame ou madeira , formando figuras quadradas, como indica a figura.

a).- Observe a sombra dessa tela, sob a iluminação solar, nos seguintes casos, em diferentes horários, incluindo o meio-dia.

I)- A tela é apoiada sobre um de seus lados, perpendicularmente ao plano do chão:

II)- A tela é colocada paralelamente em relação ao plano do chão, a uma certa distância dele (20 cm, aproximadamente):

FOLHA-TIPO I-11a

III)- A tela é apoiada sobre um de seus vértices e a diagonal que parte desse vértice é perpendicular ao plano do chão.

b).- Observe a sombra dessa tela, sob a iluminação de uma lâmpada nos mesmos três casos do item a).

Anote os resultados de suas experimentações e faça desenhos que as representem.

ATIVIDADE 12: TRANSFORMAÇÕES DE FIGURAS.

OBJETIVOS: Construir o conceito de congruência e, em particular, de triângulos congruentes.

PARTE 1: COPIANDO E MOVIMENTANDO FIGURAS.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo I-12 e instrumento básicos de desenhos.

DESENVOLVIMENTO:

Distribua a cada aluno uma folha-tipo I-12.

Enquanto desenvolvem, individualmente o trabalho, procure observar os procedimentos que usam.

Ao terminarem, discuta com eles:

a) Relativamente à proposta de cópia da fachada.
- Que comentários têm a fazer?
- Que cuidados tiveram ao realizar o desenho?
- Por onde começaram?
- Que elementos da figura sentiram necessidade de medir?
- Como avaliam a cópia feita?
- O que fariam para se certificar de que está boa?

b) Relativamente à proposta de completar a obra-de-arte:

* Que idéia comum é essa que foi usada?
* Como procederam para fazer o que foi pedido?
* Por onde começaram?
* Que medidas sentiram necessidades de realizar?
* O que fariam para se certificar de que o desenho está bom?

Aproveite a oportunidade para organizar as idéias que os alunos têm nesse momento sobre simetrias e congruências.

PARTE 2: REFLETINDO UM TRIÂNGULO NUMA RETA.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo II-12 e Instrumentos de desenho.

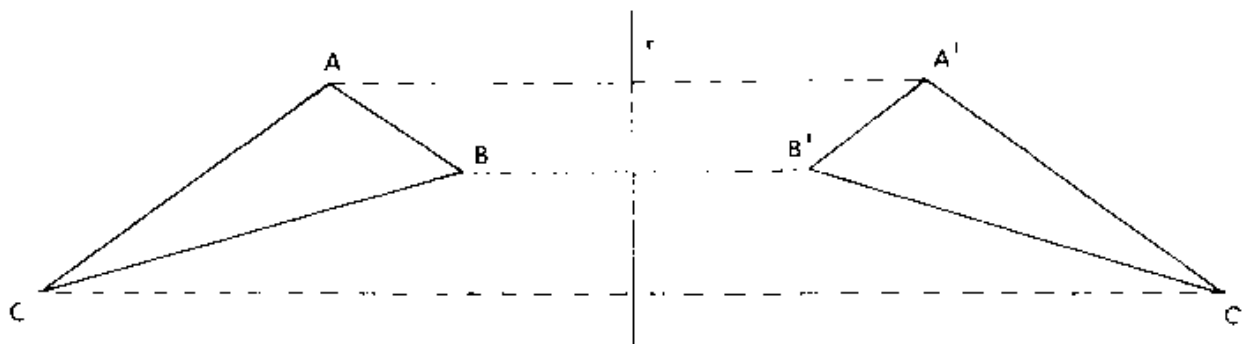
DESENVOLVIMENTO:

Após essa primeira etapa exploratória, comente com os alunos que farão, junto com você, algumas construções geométricas com régua e compasso. Serão construídos:

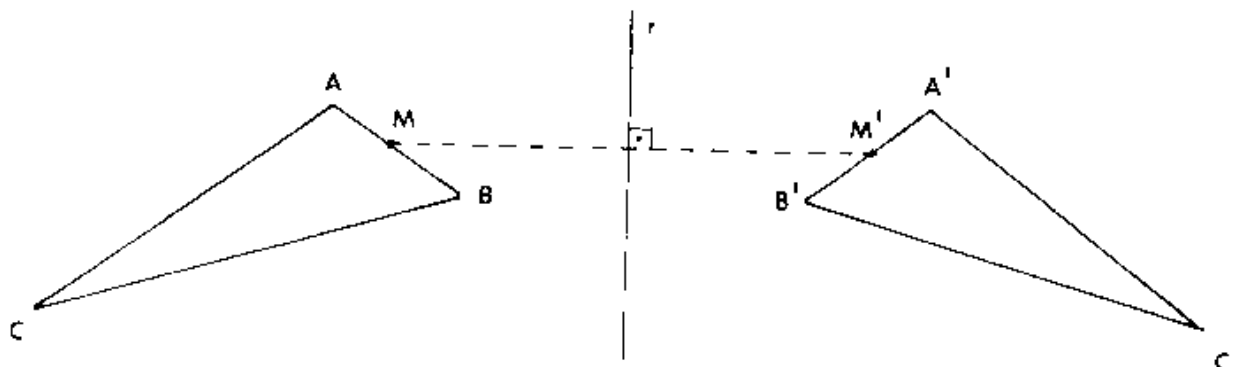
a)- Um triângulo cujos lados medem 5,5 cm; 4,5 cm e 2 cm; combine que os vértices serão chamados de A, B e C, respectivamente.

b)- Uma reta qualquer, que não corte o triângulo (mesmo quando prolongada). Chamaremos essa reta de reta “r”.

Convide a classe para fazer a reflexão do triângulo nessa reta de modo análogo ao que foi feito com as obras-de-arte. Discuta os procedimentos que serão adotados.

As discussões deverão levar, provavelmente, à construção de perpendiculares pelos pontos A, B e C à reta r; em seguida, à marcação de igual medida do segmento AP para obter o ponto A' (ver figura). De modo parecido, são obtidos os pontos B' e C' e conseqüentemente o triângulo A'B'C' que é a imagem do triângulo ABC, na reta r.

Feita a construção, peça à classe para estabelecer comparações entre as figuras. É provável que surjam observações do tipo:

- As medidas dos lados da figura e de seus ângulos, não se alteram.
- A figura muda de posição, ou seja, fica invertida.

Chame atenção para o seguinte fato: o que acontece se marcarmos um ponto qualquer (num dos lados do triângulo ABC ou no seu interior ou fora dele) e acharmos o simétrico desse ponto em relação à reta r? Peça que façam experiência, por exemplo, com o ponto médio do lado que mede 2 cm.

Levante a seguinte questão: Vocês concordariam que disséssemos que o triângulo A' B' C' é IGUAL ao triângulo ABC? Por quê?

Discutidos prós e contras, conte a eles que há um termo que usando quando se quer falar de figuras que coincidem, quando são superpostas: dizemos que elas são CONGRUENTES ou que há CONGRUÊNCIA entre elas.

Distribua uma folha-tipo II-12 para cada aluno e peça que façam, com régua e compasso, a reflexão do triângulo ABC, na reta r; do triângulo obtido, na reta s e de sua imagem, na reta t. Depois, devem refletir cada um dos triângulos dessa fila, na reta u.

Solicite que façam a reflexão do triângulo DEF, na reta a, a sua imagem, na reta b e assim sucessivamente.

Esse trabalho pode ser iniciado em classe e completado em casa; uma vez feitas as construções os alunos farão uma lista das observações e conclusões que tirarem delas.

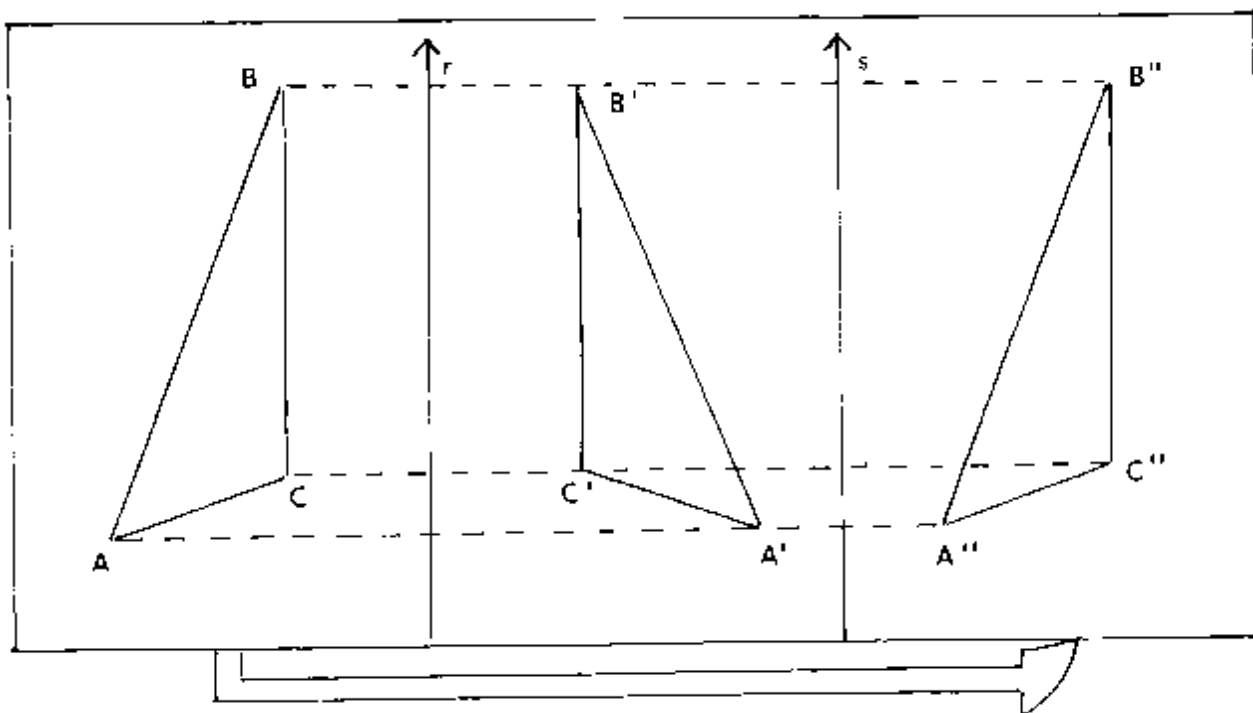
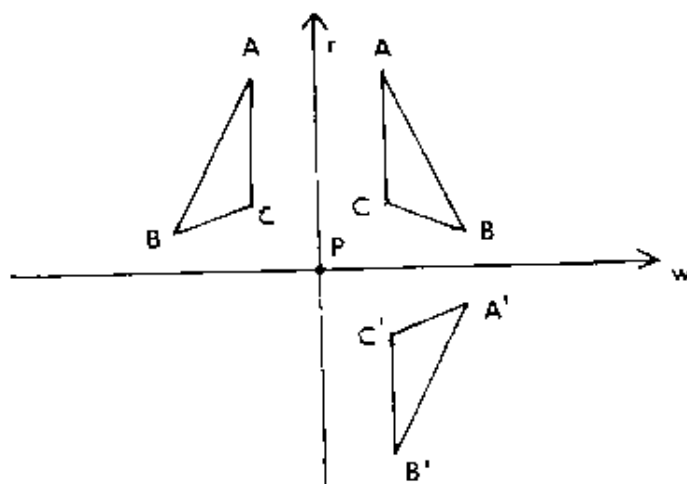
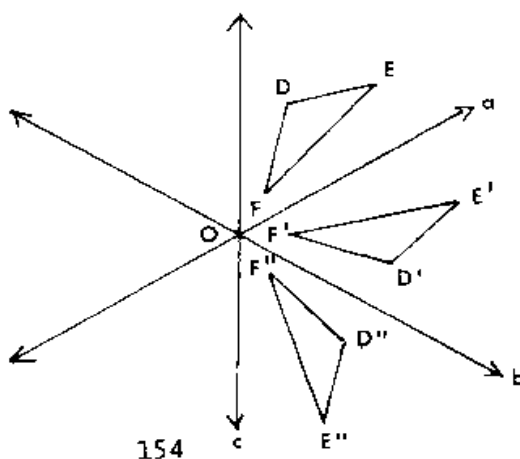
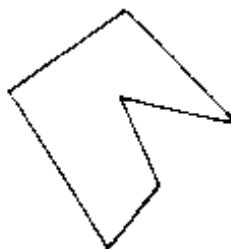
PARTE 3: OBSERVANDO MELHOR OS MOVIMENTOS.

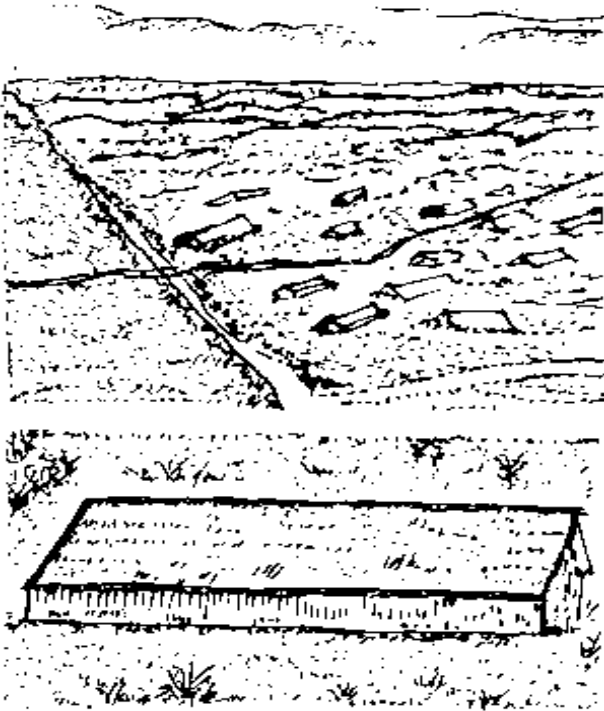
MATERIAL NECESSÁRIO: O mesmo da parte anterior.

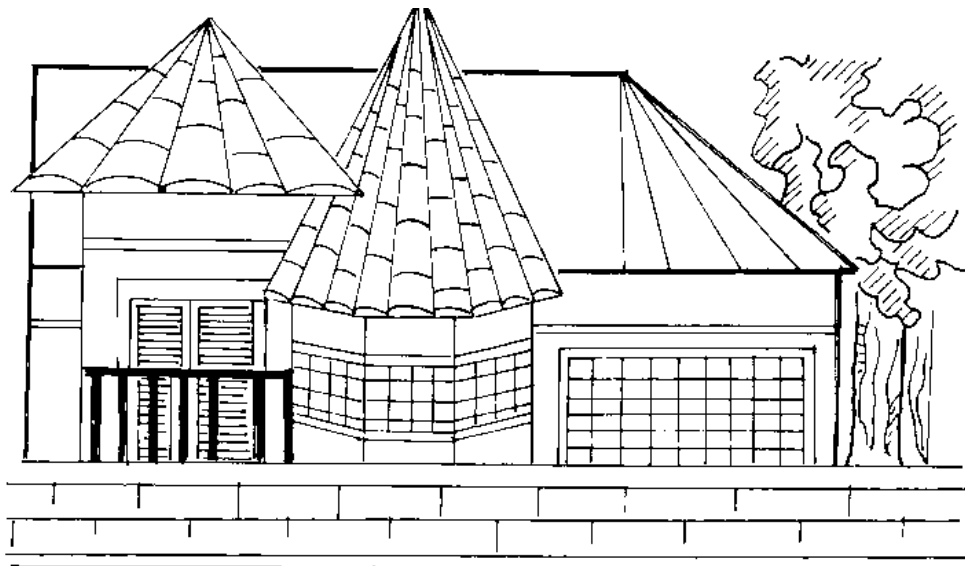
DESENVOLVIMENTO:

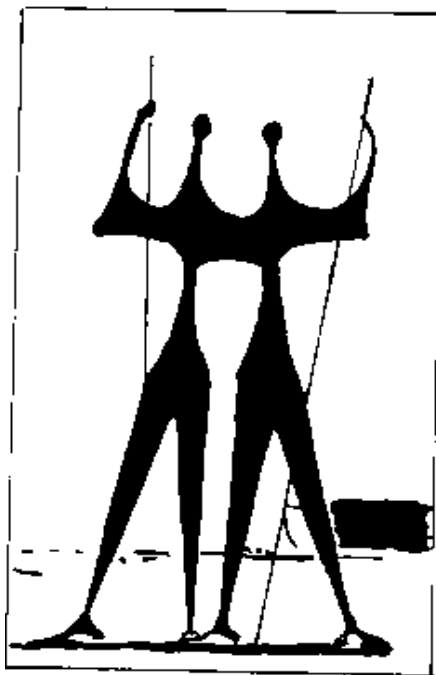
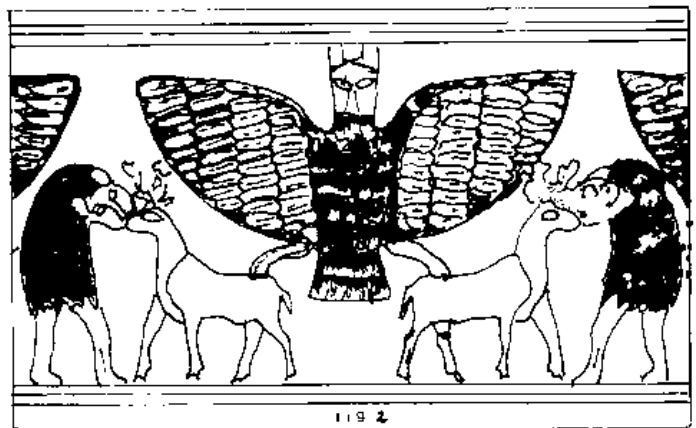
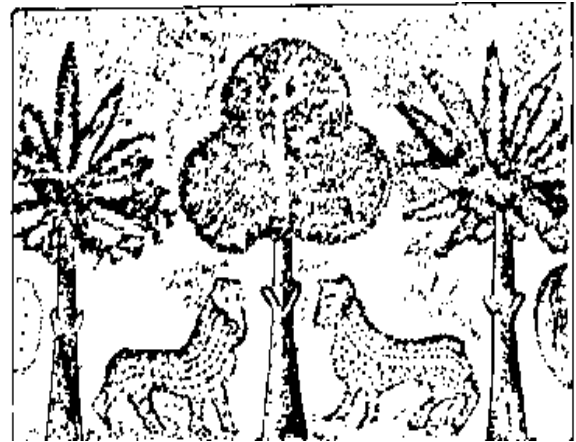
Com a folha-tipo II-12 em mãos, a classe discutirá as conclusões a que chegaram e você pode completar, com outras observações que eventualmente não tenham sido feitas. Peça também aos alunos que pintem, em cada figura, os lados correspondentes e os ângulos correspondentes e os ângulos correspondentes, respectivamente, da mesma cor.

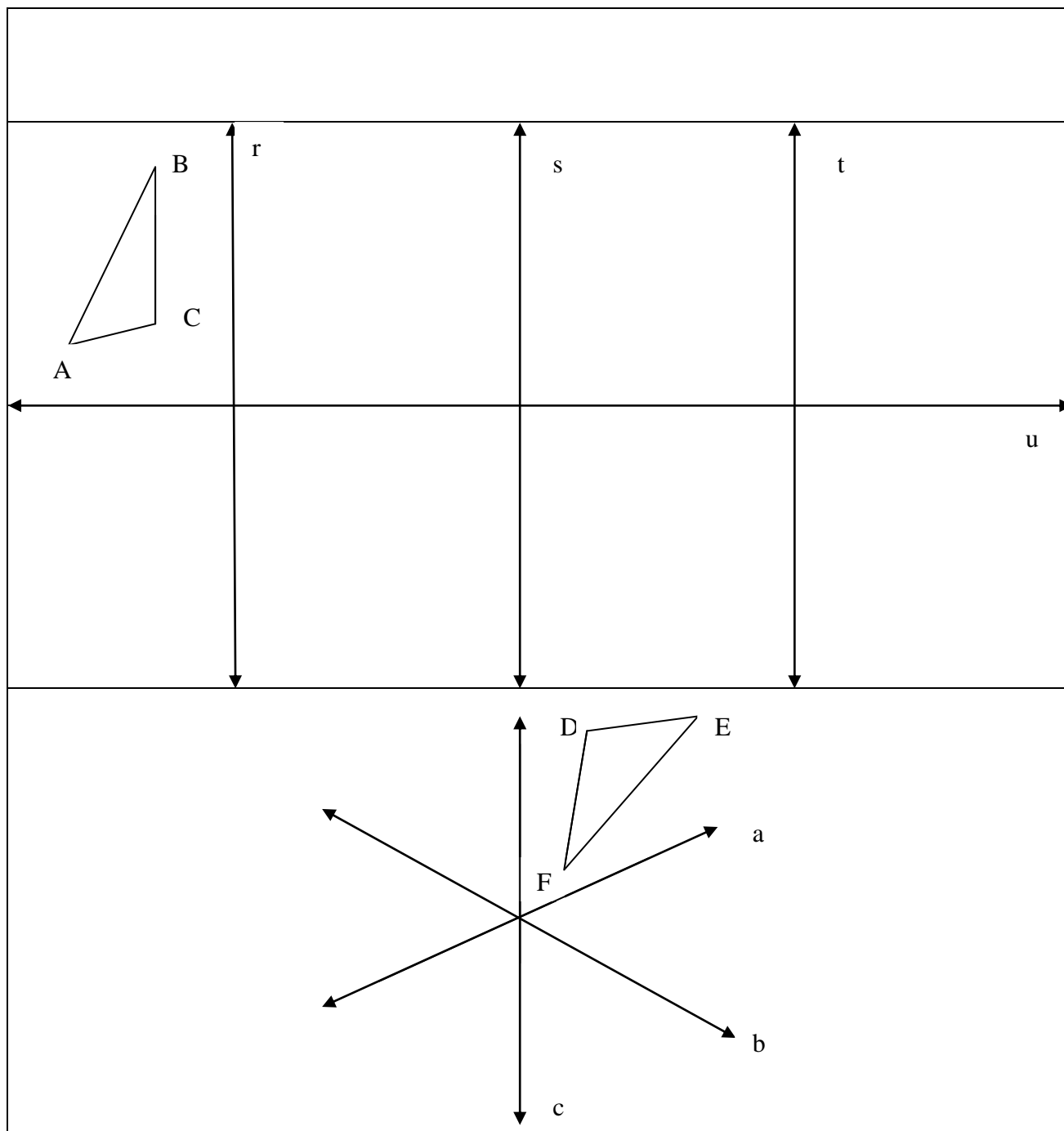
Conte a eles que as construções que fizeram constituem os principais movimentos de uma figura, no plano, produzidos por reflexões em retas:

* Comparando o primeiro e o terceiro triângulos, verificamos que se encontram na mesma posição; entre eles dizemos que houve uma TRANSLAÇÃO; é como se tivéssemos "empurrado" o primeiro (na direção das perpendiculares que foram traçadas para obter as reflexões). A título de curiosidade, peça que meçam a distância entre as retas r e s e entre dois pontos correspondentes, por exemplo A e A'.

* Comparando o primeiro triângulo da fila superior e segundo da fila inferior, é possível observar importantes propriedades, por exemplo, ligando vértices correspondentes; pergunte à classe se seria possível construir essa “imagem” do primeiro triângulo sem fazer antes a reflexão deste na reta “r”? De que modo?

* Alguns dos movimentos do triângulo DEF são chamados ROTAÇÕES de centro 0. Do 1º para o 3º, houve uma rotação de 120 graus? Para comprovar isso uma dois pontos correspondentes (por exemplo D e D’) ao ponto central 0. Depois, meça o ângulo formado e compare sua medida com a do ângulo formado pelas retas a e b. E nos outros casos, o que aconteceu?

Proponha, para finalizar, que a classe construa livremente, imagens de uma outra figura de preferência bem irregular (como por exemplo a figura abaixo), através de reflexões em retas, translações, rotações, etc. e peça que verifiquem se as imagens obtidas são ou não congruentes à figura original.

FOLHA-TIPO I-12

Copiando e movimentando figuras.

Escavações arqueológicas de diversas partes do mundo, mostraram a existência de vilas com construções todas do mesmo tipo. Até hoje, a exemplo dos nossos antepassados, fazemos construções bastante parecidas umas com as outras, principalmente quando se trata de economizar!

Vamos fazer de conta que você adorou a fachada de uma casa desenhada numa revista (que por acaso é a da figura abaixo) e quer copiá-la para fazer uma igualzinha. Você não dispõe de xérox, nem de papel carbono, nem de papel de seda. Tem apenas uma folha de papel, lápis, régua, transferidor, esquadros. Mãos à obra!

FOLHA-TIPO I-12a

Os autores de algumas obras de arte, antigas ou recentes, com o vaso sumério (2700 a.C.) (fig. 1), ou mosaico do sec. XII (fig. 2), ou o monumento à fraternidade humana em Brasília (fig. 3), usaram uma mesma idéia em suas criações. Descubra qual é e complete esta outra “obra de arte”, usando essa idéia comum.

FOLHA-TIPO II-12

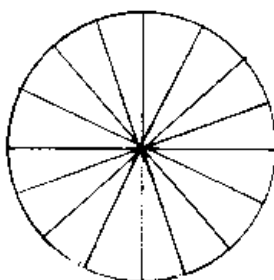
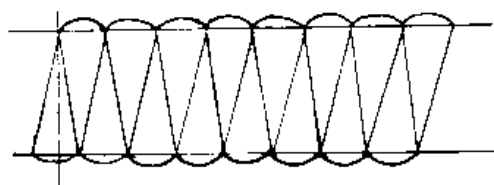
Refletindo um triângulo numa reta.

ATIVIDADE 13: ÁREA E PERÍMETRO DO CÍRCULO.

OBJETIVOS: Sistematizar o estudo de áreas de polígonos.
Desenvolver a noção de área do círculo.
Resolver situações-problema envolvendo a noção de área , perímetro e suas relações.

PARTE 1: A ÁREA DO CÍRCULO.

MATERIAL NECESSÁRIO: Um pedaço de cartolina, tesoura e cola.

DESENVOLVIMENTO:

Peça a cada aluno para desenhar um círculo em um pedaço de cartolina e, utilizando um dos processos que conhece, dividi-lo em várias partes: 16, 18 ou 32.

A seguir, recortarão a figura, decompondo o círculo em setores circulares de $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{18}$, ou $\frac{1}{32}$ do círculo, montando uma figura que se se aproxima de um paralelogramo.

Proponha que os alunos discutam:

* O que se pode afirmar sobre as dimensões desse "paralelogramo" se aumentarmos mais ainda o número de divisões do círculo?

* Qual é a altura e a base desse paralelogramo?

Verifique se eles aceitam o fato de que a base do "paralelogramo" é aproximadamente a metade do comprimento da circunferência (π r) e tanto mais próximo de π . r será quanto maior for o número de setores circulares (divisões do círculo) e que a altura do "paralelogramo" se aproxima do raio r do círculo.

Assim, a área desse paralelogramo pode ser:

$$A = \pi . r$$

tendo em vista que ele contém todas as partes do círculo.

Uma vez admitida essa maneira de calcular a área do círculo por aproximações, proponha que determinem:

1.- A área de um círculo de raio igual a 4 cm.

2.- O diâmetro de um círculo de área igual a 314,16 cm^2 .

COMENTÁRIOS:

O cálculo da área do círculo, assim como a medida do perímetro da circunferência não escapam dos processos de aproximações sucessivas, da idéia de limite.

Na atividade 5 a determinação da área de um polígono regular permitiu, com a introdução da noção de apótema, estender esse cálculo para a párea do círculo. Se aumentarmos infinitamente a quantidade de lados do polígono regular, o apótema se aproximará cada vez mais do raio e a área do polígono se confundirá com a área do círculo.

Tal processo foi desenvolvido por Johann Kepler (1571 – 1630). “Ele imaginava a área de um círculo como a área de um polígono inscrito formado de infinitos triângulos isósceles com vértices no centro do círculo, alturas (apótemas) iguais aos raios e tendo como base cordas infinitesimais do círculo. Mediante essa técnica achou que a área do círculo é $\frac{1}{2}$ do produto do raio pela circunferência” (*). Escrito de uma forma atual ficaria assim:

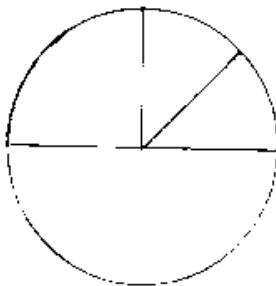
(*) Ver o livro: Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: CÁLCULO de Carl B. Boyer.

PARTE 2: ÁREA DE UM SETOR CIRCULAR.

MATERIAL NECESSÁRIO: Nenhum.

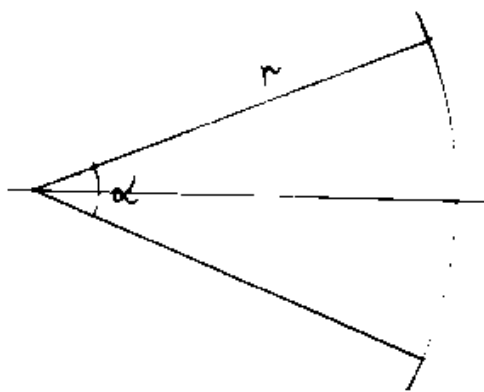
DESENVOLVIMENTO:

Peça aos alunos para desenharem um círculo de raio igual a 4 cm numa folha de papel ou caderno e proponha para eles discutirem o que é necessário para acharmos a área de uma parte desse círculo, como a indicada na figura, o setor circular.

Após um tempo, levante junto aos grupos os tipos de soluções que apresentam. Considere junto a eles, que uma vez sabendo calcular a área do círculo a área de parte como $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, etc, são relativamente simples, bastando para isso, dividir sua área em 2, 4, 6, etc partes.

Ressalte também os ângulos centrais observados em cada uma das partes que eles trabalharam e as razões entre as partes mencionadas acima:

360º	$\pi \cdot r^2$
180º	$\pi \cdot \frac{r^2}{2}$
90º	$\pi \cdot \frac{r^2}{4}$
60º	$\pi \cdot \frac{r^2}{6}$

Peça então que calculem neste caso a área de um setor cujo ângulo central seja de 30º e de 1º.

Proponha que discutam um modo para se determinar o cálculo da área de um setor circular de um círculo qualquer de raio r e relativo a um ângulo central α. Solicite que escrevam uma expressão para este cálculo.

Após um tempo para a discussão verifique qual o processo utilizado e se conseguiram chegar à expressão:

$$A = \alpha \cdot \pi \cdot \frac{r^2}{360}$$

encontrada pelo cálculo da área do setor de $\frac{1}{360}$ do círculo, relativo ao ângulo central de 1º, e multiplicando por α.

Discutidos esses casos que se referem a um mesmo círculo, caberá uma discussão sobre o que ocorre com a área de setores relativos a um mesmo ângulo central, quando variamos a medida do raio. Proponha um exemplo:

Três circunferências concêntricas tem raios iguais a 2, 4 e 12 cm. Verifique a relação que se pode estabelecer entre as áreas de setores circulares relativos a um mesmo ângulo central.

PARTE 3: RELAÇÕES ENTRE ÁREAS E PERÍMETROS.

MATERIAL NECESSÁRIO: Papel quadriculado, cartolina.

DESENVOLVIMENTO:

Proponha para serem feitas em aula ou em casa algumas situações:

Situação 1:

Resolver os problemas:

- Um retângulo em que a medida do seu comprimento é o dobro da medida da largura tem área igual a 50 cm^2. qual é a largura e o comprimento desse retângulo?
- Para cercar um terreno de área igual a 100 m é necessário uma certa quantidade de arame para dar uma volta no terreno.
  - Se ele for quadrado quanto de arame será necessário para 4 voltas?
  - Se o terreno for retangular e tiver 5 m de largura qual é a quantidade de arame necessária para dar 4 voltas?
- Uma praça tem a forma de um trapézio isósceles, conforme a figura seguinte:

Para fazer o calçamento da praça é necessário conhecer sua área. Calcule-a de acordo com as medidas indicadas na figura.

Situação 2:

Calcular a área total da superfície de uma caixa de sapatos, remédios ou eletrodoméstico.

Confeccionar, em cartolina, uma caixa, em forma de prisma retangular, com 148 unidades de área. Após a confecção da caixa, verificar os tipos de caixa e analisar o que aconteceu.

Situação 3:

1.- Calcule a área de uma folha de papel sulfite. Feche-a colando as pontas de modo a formar um cilindro. Qual é o raio desse cilindro?

2.- Desenhe um retângulo num pedaço de cartolina, com as dimensões que você escolher. Antes de colar as laterais, formando o cilindro, e descontada a parte que achar necessária para colar, recorte os círculos que serão as bases do cilindro.

3.- Calcule a área total de uma lata de forma cilíndrica, que você escolher em casa.

Situação 4:

1.- Confeccione um setor circular de raio igual a 12 cm e ângulo central igual a 120º. Qual é o seu perímetro? Qual é a sua área?

Cole as laterais, formando um cone. Qual é o raio da base desse cone? Use régua para medir e verifique em seguida, fazendo o cálculo, usando o perímetro do setor circular acima mencionado.

3.- Calcule a área total de um cone, após planificá-lo.

COMENTÁRIOS:

Essas situações problema podem ser apresentadas em aula para um estudo em grupo, ou para trabalhos individuais a serem realizados em classe ou em casa. Muitas situações podem ser propostas retomando todo o estudo das medidas de perímetro e áreas.

Nas situações 3 e 4, o conhecimento de perímetro e área do círculo e do setor circular permitem fazer alguns cálculos relativos às áreas do cilindro e do cone. No entanto, há grandezas como por exemplo a altura do cone que pode ser medida, mas, provavelmente os alunos ainda não têm os elementos necessários para o seu cálculo, que exigiram o conhecimento da relação de Pitágoras.

ATIVIDADE 14: EQUAÇÕES E APLICAÇÕES.

OBJETIVOS: Relacionar o conhecimento sobre equações do 1º grau com uma variável, com outros conceitos matemáticos, a fim de resolver problemas.

PARTE 1: AJUDANDO O PROFESSOR.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo I-14 e calculadora simples.

DESENVOLVIMENTO:

Forneça a cada aluno uma folha-tipo I-14.

Conte a eles que nessa folha encontra-se o levantamento das notas da prova de Inglês de três turmas de um curso do 2º grau. Entretanto, a folha foi danificada e o professor quer recuperar as notas e médias que ficaram apagadas e, para tanto, pediu seu auxílio. Você, por sua vez, tendo a certeza de que esse trabalho pode ser feito por seus alunos, está apresentando a eles a tal folha.

Vamos ajudar o professor de Inglês.

Inicialmente, sugira aos alunos que observem as tabelas e interpretem o significado dos dados nelas contidos.

Discuta com os alunos qual é a forma de encontrarmos a média das notas de cada classe, após o que deixe-os à vontade para resolver o problema: recuperar as tabelas.

Depois de terminado o trabalho, provavelmente com o auxilio da calculadora, os alunos poderão expor suas resoluções, que poderão ser conhecidas e discutidas por todos.

Muitas são as maneiras de resolver o problema, entretanto, a intenção é fazer com que eles utilizem equações para resolver as questões tanto do 1º A quanto da 1º B e 1º C.

Caso tais equações não apareçam, passe para uma segunda fase de atividade: coloque na lousa as equações seguintes e solicite aos alunos que verifiquem quais delas servem para recuperar as tabelas e, uma vez escolhidas, peça a eles que resolvam-nas, para comparar suas soluções com o resultado obtido na primeira parte da atividade.

Para da Tabela do 1º A

a) $$\frac{2x2 + 15x7{,}5 + 1x9{,}5 + 2x4{,}5 + 2x10 + 4x5 + 6x6 + 3x9 + 7x8}{42} = x$$

b) $$\frac{2 + 7{,}5 + 9{,}5 + 4{,}5 + 10 + 5 + 6 + 9 + 8}{9} = x$$

c) $$\frac{2 + 7{,}5 + 9{,}5 + 4{,}5 + 10 + 5 + 6 + 9 + 8}{42} = x$$

Para a Tabela do 1º B

a) $$\frac{5 + 1 + 6{,}5 + x + 7 + 3{,}3 + 9 + 10}{40} = 6{,}63$$

b) $$\frac{5 + 1 + 6{,}5 + x + 7 + 3{,}3 + 9 + 10}{8} = 6{,}63$$

c) $$\frac{20 + 2 + 4{,}5 + 4x + -1 + 9{,}9 + 54 + 10}{40} = 6{,}63$$

Para a Tabela do 1º C

a) $$\frac{5 \times 3{,}5 + 10x8 + x.6 + 1x0{,}5 + 4x7 + 12x9}{32 + x} = 7{,}2$$

b) $$\frac{5 + 10 + x + 1 + 4 + 12}{32} = 7{,}2$$

c) $$\frac{3{,}5 + 8 + 6 + 0{,}5 + 7 + 9}{6 + x} = 7{,}2$$

Ao escolher as equações a), c) e a) para as tabelas do 1º A, 1º B e 1º C, respectivamente, os alunos encontrarão como soluções:

média 7,0 no caso do 1º A

nota 8,2 no caso do 1º B

3 alunos no caso do 1º C

PARTE 2: JOGOS E EQUAÇÕES.

MATERIAL NECESSÁRIO: Nenhum.

DESENVOLVIMENTO:

Ponha na lousa os problemas seguintes e solicite aos alunos que resolvam, em pequenos grupos, cada questão.

Problema 1. Um baralho de 52 cartas foi repartido em três montes. No primeiro havia o dobro de cartas do segundo e neste, 8 cartas a mais do que no terceiro. Quantas cartas havia em cada monte?

Problema 2. 52 cartões azuis e 60 vermelhos foram distribuído igualmente entre pessoas de um grupo, para o sorteio, de modo que cada pessoa recebeu cartões de uma só cor e todos a mesma quantidade. Havia 4 pessoas a menos com cartões azuis do que com cartões vermelhos. Quantas pessoas havia no grupo?

Problema 3. A tabela mostra o total de pontos obtidos por uma equipe em quatro partidas de um jogo. Complete os pontos de cada partida, sabendo que:

a) Nas partidas de ordem impar eles fizeram a mesma quantidade de pontos e
b) Na 2ª partida fizeram o dobro de pontos da 1ª e na 4ª o dobro de pontos da 2ª.
c)

Partida	número de pontos
1ª	
2ª	
3ª	
4ª	
Total	384

COMENTÁRIOS:

Na resolução do primeiro problema, além dos conceitos referentes à técnica de resolução de equação do 1º grau (Princípios Multiplicativos e Aditivo), outros conceitos estão envolvidos como a idéia de juntar, veiculada pela Adição, a propriedade distributiva da Adição em relação à multiplicação de números naturais e a propriedade Associativa da Adição:

Já no segundo problema a idéia fundamental é a de distribuição equitativa, veiculada pela Divisão:

A resolução da terceira questão leva em conta, como na primeira, a idéia de juntar e do dobro.

PARTE 3: EQUAÇÕES E PERÍMETROS.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo II-14.

DESENVOLVIMENTO:

Divida a classe em grupos de três alunos e forneça a cada um deles uma folha-tipo II-14.

Dê um tempo para que cada aluno do grupo resolva um dos problemas, à escolha do grupo.

A seguir, estipule com eles outro período para que os três alunos tomem conhecimentos dos três problemas, para discutirem e fazerem eventuais reformulações na resolução.

Numa terceira etapa, junte todos os alunos que resolveram o primeiro problema num grupo, todos os que resolveram o segundo problema em outro grupo e finalmente forme um grupo com todos os alunos que resolveram o terceiro problema. Proponha a eles que discutam as resoluções do problema sob sua responsabilidade.

Caso permaneçam dúvidas após esse trabalho, abra uma discussão com toda a classe.

COMENTÁRIOS:

Nos 1º e 2º problema, além da oportunidade de aplicar a noção de perímetro para compor as equações, o aluno também se põe diante da aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, para resolver tais equações:

1º problema	2º problema
$2.x + 2.x + x + x = \frac{1}{5}(30 + 6.x)$	$4(3.x + 3.x + x + x) = 640$
onde x = MB	onde x = largura

Por outro lado, o 3º problema oferece condições para que o aluno trabalhe com equações racionais, como por exemplo:

$$\frac{20}{x} - \frac{30}{2 . x} = 1,$$ onde x é o perímetro da lata.

momento em que, terá a oportunidade de aplicar o princípio multiplicativo da igualdade (ou, se quiser, a redução das frações a um mesmo denominador, para em seguida operar com elas).

FOLHA-TIPO I-14

Ajudando o Professor.

Vamos completar o que falta?

1º A

nº de alunos	nota
2	2,0
15	7,5
1	9,5
2	4,5
2	10,0
4	5,0
6	6,0
3	9,0
7	8,0

Média:

1º B

nº de alunos	nota
4	5,0
2	1,0
7	6,5
4	
13	7,0
3	3,3
6	9,0
1	10,0

[illegible]éd[illegible]a: 6,63

1º C

nº de alunos	nota
5	3,5
10	8,0
	6,0
1	0,5
4	7,0
12	9,0

Média: 7,2

FOLHA-TIPO II-14

Equações e Perímetros.

1º Problema

CD e AMPQ são retângulos.

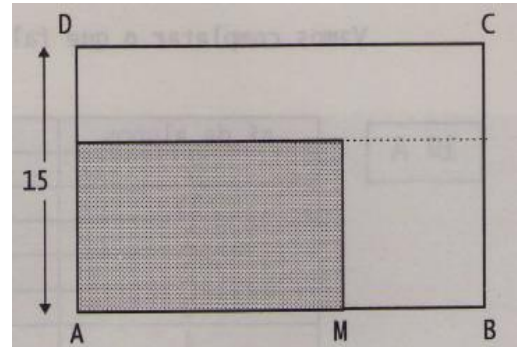
Sabe-se que:

CB = 15 cm

AM = 2 . MB

PMBR é um quadrado

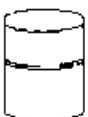
perímetro de AMPQ é a quinta parte do perímetro de ABCD.

Quanto mede os lados dos retângulos AMPQ?

2º Problema

Para cercar um terreno com quatro voltas de arame farpado, foram gastos, exatamente, 640 m desse material. O terreno, de forma retangular, tem o comprimento três vezes maior que a largura. Quantos metros o terreno tem de frente e de fundos.

3º Problema

Maria quer decorar uma lata cilíndrica com um fio. Ela tem duas opções: cada volta com fio simples,

ou

cada volta com fio duplo.

A diferença entre o número de voltas que ela obtém com 20 cm de fio no 1º caso e com 30 cm no 2º caso é 1. Quantos centímetros têm o perímetro da lata?

ATIVIDADE 15: DESIGUALDADES.

OBJETIVOS: Constatar propriedades das desigualdades e utilizá-las na resolução de situações problemas.

PARTE 1: ACRESCENTANDO OU RETIRANDO A MESMA QUANTIDADE AOS DOIS TERMOS DE UMA DESIGUALDADE.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo I-15.

DESENVOLVIMENTO:

Se houver necessidade, retome com os alunos a representação geométrica dos números racionais antes de pedir que respondam às questões da folha-tipo I-15.

A folha-tipo I-15 poderá ser respondida individualmente ou em pequenos grupos. No entanto, é indispensável que a discussão das respostas seja feita com a classe toda, levantando outras questões, sempre evidenciando as propriedades que estão sendo estudadas, ou seja:

- Quaisquer que sejam os números a, b e c temos:
  Se $a > b$, então $a + c > b + c$.
  Se $a < b$, temos $a + c < b + c$.
  Se $a > b$, então $a – c > b – c$.
  Se $a < b$, então $a – c < b – c$.

PARTE 2: PROBLEMAS.

MATERIAL NECESSÁRIO: Nenhum.

DESENVOLVIMENTO:

Após a discussão das propriedades estudadas na Parte 1, proponha aos alunos as seguintes questões:

1.- João tinha 3 anos de idade quando nasceu Pedro. Hoje João tem mais que 15 anos. O que podemos afirmar a respeito da idade de Pedro hoje?

* Quais das sentenças abaixo poderia traduzir a idade de Pedro hoje, representando a idade de Pedro por x?

$x > 18$.

$x < 12$.

$x > 12$.

2.- Somando-se R$ 100,00 ao meu salário eu passo a ganhar mais do que um motorista de ônibus.

O que você pode dizer a respeito do meu salário, sabendo que neste mês, um motorista de ônibus ganhou dois salários mínimos?

Utilize uma sentença matemática para traduzir a situação do meu salário em relação ao salário de um motorista de ônibus.

3.- Invente uma situação que poderia ser traduzida por uma desigualdade.

4.- Complete as sentenças abaixo, aplicando corretamente as propriedades das desigualdades estudadas.

a) se $x + 3 > 7$, então $x >$ ....

b) se $y - 3 < 12$, então $y<$ ....

c) se $m + 3 \leq 22$, então m ....

d) se $3 + w > 15$, então ....

e) se $x - 11 <$ ...., então $x < 20 + 11$

f) se $x - y < m$, então $x <$ ....

PARTE 3: MULTIPLICANDO OU DIVIDINDO A MESMA QUANTIDADE AOS DOIS MEMBROS DA DESIGUALDADE.

MATERIAL NECESSÁRIO: Nenhum.

DESENVOLVIMENTO:

A.- Apresente aos alunos o seguinte roteiro de trabalho:

Roteiro:

1. Localize na reta numérica os seguintes números:

   5, -3, 2, 0, -1.
2. Organize esses números em ordem crescente.
3. Multiplique cada um desses números por -1.
4. Localize os resultado obtidos no item 3, na reta numérica.
5. Organize esses resultados na ordem crescente.

   Compare as respostas que você deu nos itens 2 e 5.

   O que você pode concluir desse fato?

B.- Comente as respostas apresentadas pelos grupos e a seguir, apresente os desafios:

1.- Descubra um valor para x que torna a sentença abaixo verdadeira:

$$4 . x > 3 . x$$

Dê um tempo e analise na lousa, todas as sugestões apresentadas.

2.- Descubra um valor para y na sentença abaixo, de modo a torná-la verdadeira.

$$4 . y < 3 . y$$

Da mesma forma, dê um tempo e analise na lousa, todas as respostas dadas pelos alunos.

3.- A partir da análise dessas duas situações, os alunos poderão ser convidados a redigirem suas conclusões.

PARTE 4: O SENTIDO DA DESIGUALDADE.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo II-15.

DESENVOLVIMENTO:

Peça aos alunos que façam os exercícios propostos na folha-tipo II-15, individualmente. A seguir, deverão reunir-se em grupos para a discussão das respostas apresentadas.

Comente cada um dos exercícios na lousa, levantando questões relativas à mudança do sentido da desigualdade quando os seus membros são multiplicados por números negativos.

Se houver dúvidas quanto à mudança ou não do sentido da desigualdade, peça que façam a verificação representando os números na reta numérica.

Isto feito, proponha aos alunos que verifiquem se as propriedades dadas a seguir são verdadeiras. Peça que discutam essas propriedades e que procurem exemplos numéricos para verificação de cada uma.

1.- Quaisquer que sejam os números a, b, e c com $c > 0$, temos: se $a > b$, então $a . c > b . c$ se $a < b$, então $a . c < b . c$
2.- Quaisquer que sejam os números a, b, e c com $c < 0$, temos: se $a > b$, então $a . c < b . c$ se $a < b$, então $a . c > b . c$

A seguir, organize a classe em pequenos grupos e proponha que discutam e respondam as seguintes questões:

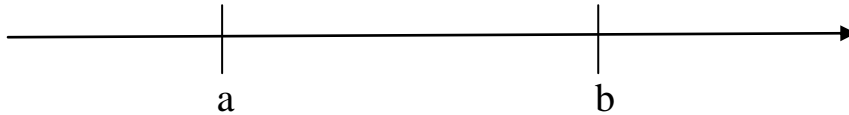
- O que acontece com o sentido de uma desigualdade quando dividimos os dois membros por um número positivo?
- O que acontece com o sentido de uma desigualdade quando dividimos seus membros por um número negativo?

Peça que antes de responderem as questões acima façam constatações em exemplos numéricos.

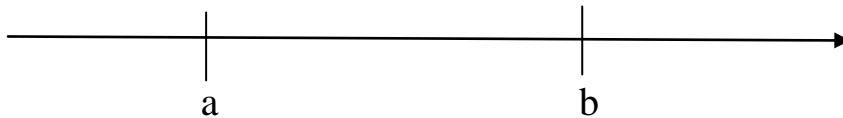
Comente as respostas dadas pelos alunos e, uma vez compreendida as propriedades, peçam que as traduzam por meio de uma escrita algébrica, a exemplo do que foi feito com as propriedades trabalhadas na parte 4.

FOLHA-TIPO I-15

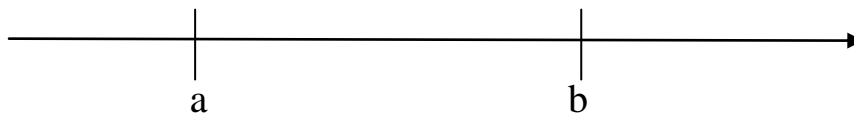
Acrescentando ou retirando a mesma quantidade aos dois membros de uma desigualdade.

1.- Sejam a e b dois números racionais representados geometricamente sobre uma reta da seguinte maneira:

Observando a posição de a e b na reta, concluímos que é verdadeira a afirmação:

( ) $a > b$ ( ) $a < b$ ( ) $a = b$

2.- Represente na reta abaixo os números a e b somados de uma unidade, ou seja $(a + 1)$ e $(b + 1)$:

Nesse caso, você usaria sinal $>$, $<$ ou $=$, para completar a sentença:

$(a + 1)$ .... $(b + 1)$?

3.- E os pontos $(a – 3)$ e $(b – 3)$, como poderiam ser representados na reta?

Complete a sentença abaixo com o sinal que a tornará verdadeira:

$(a – 3)$ .... $(b – 3)$

FOLHA-TIPO I-15a

4.- Faça outras experiências e depois responda se a afirmação seguinte é verdadeira ou não:

O sentido de uma desigualdade não muda quando somamos ou subtraímos seus membros pelo mesmo número.

5,- Verifique quais das afirmações abaixo são verdadeiras para qualquer que sejam os números a, b e c:

Se $a > b$, então $a + c > b + c$.

Se $a < b$, então $a + 3 < b + c$.

Se $a > b$, então $a – c > b – c$.

Se $a < b$, então $a – c > b – c$.

FOLHA TIPO II-15

Desigualdades.

1.- Faça as multiplicações seguindo as flechas:

1. 8 > 4 ↓ ↓ x (-2) x(-2) ↓ ↓ -16 < -8	2. -13 < 10 ↓ ↓ x (-3)...x (-3) ↓ ↓	3. -2 > -50 ↓ ↓ x (-10) x (-10) ↓ ↓ ....
4. 15 > 7 ↓ ↓ x (+3) x (+3) ↓ ↓	5. 18 > -20 ↓ ↓ x (4) x (4) ↓ ↓	6. -35 < -1 ↓ ↓ x (10) x (10) ↓ ↓ ....
7. 0 > -10 ↓ ↓ x (-1) x (-1) ↓ ↓	8. -6 < -2 ↓ ↓ x (-1) x (-1) ↓ ↓	9. 250 < 1000 ↓ ↓ x (-1) x (-1) ↓ ↓ ....
10. $\frac{1}{2}$ > $\frac{1}{4}$ ↓ ↓ x (-2) x (-2) ↓ ↓	11. 0,75 < 1 ↓ ↓ x (-1) x (-1) ↓ ↓	12. x > y ↓ ↓ x (-1) x (-1) ↓ ↓ ....

Observe os exercícios que você acabou de fazer e diga qual das afirmações abaixo são incorretas:

- O sentido de uma desigualdade não muda quando multiplicamos os seus membros por um número negativo.
- O sentido da desigualdade muda quando multiplicamos os seus membros por um número negativo.
- Quando multiplicamos ambos os membros de uma desigualdade por um número positivo, o sentido da desigualdade pode mudar ou não dependendo da situação

ATIVIDADE 16: INEQUAÇÕES.

OBJETIVOS: Compreender o significado de uma inequação do primeiro grau e utilizar as propriedades das desigualdades para resolvê-la.
Utilizar uma inequação do primeiro grau na resolução de problemas.

PARTE 1: OS COMPRADORES.

MATERIAL NECESSÁRIO: Nenhum.

DESENVOLVIMENTO:

Proponha aos alunos a discussão da seguinte situação:

PEDRO ESTÁ VENDENDO UM BELO CARRO POR 12 MIL DÓLARES. Muitos compradores apareceram. Analise a situação de cada um:	
Renata:	Se Renata tivesse o dobro do dinheiro que tem, ainda assim, não daria para comprar o carro.
César:	Já a situação de César é bem diferente. Com a metade do dinheiro que tem, pode comprar o carro e ainda sobra algum.
Daniel:	Se Pedro fizer um desconto de 1000 dólares, Daniel poderá comprar o carro e não lhe sobra nenhum.
Silvia:	Um terço do dinheiro que Silvia não chega à metade do valor do carro.

Após uma primeira análise da situação acima que poderá ser em grupo, deixe que os alunos exponham suas conclusões e vá acrescentando perguntas como:

* Qual dos compradores tem mais dinheiro disponível para a compra do carro?
* O que você pode dizer a respeito do dinheiro que têm cada, em dólares?
* Você poderia dizer exatamente quantos dólares tem Silvia? Por quê? E quantos dólares têm Daniel?
* Imagine um comprador que estivesse em situação pior que a de Silvia, quanto ele poderia ter?
* Compare as quantias de Renata e Silvia.

A seguir, peça aos alunos que façam uma tradução algébrica de cada uma das situações.

Isto feito, coloque na lousa as inequações:

$\frac{x}{2} > 12000$	$2 . y < 12000$
$w = 11000$	$\frac{m}{3} < 6000$

Peça que comparem essas sentenças com as representações algébricas que fizeram e que identifiquem em cada uma, o comprador cuja situação poderia ser traduzida por ela.

Para concluir, diga que como eles puderam notar, o comprador Daniel é o único que tem uma situação que pode ser traduzida por uma equação. Os outros compradores apresentam situações expressas por desigualdades e uma incógnita e nesses casos dizemos que essas sentenças matemática são INEQUAÇÕES.

INEQUAÇÕES É TODA SENTENÇA MATEMÁTICA ABERTA EXPRESSA POR UMA DESIGUALDADE.

Com base na definição, peça que identifiquem nos exemplos abaixo, quais são de inequações:

a). $x + 2 < 7$ b). $3 . x = 65$
c). $x – 1 \leq 15$ d). $4 – y > - 15$
e). $3 . x – 1 = 22$ f). $5 . y – 2 \leq 98$

PARTE 2: SOLUÇÕES.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo I-16 e Folha-tipo II-16.

DESENVOLVIMENTO:

Solicite aos alunos que resolvam as questões da folha-tipo I-16 em pequenos grupos. Após a realização da tarefa, os grupos poderão expor suas respostas e comentar o que entenderam por conjunto universo e Conjunto Solução de uma inequação.

Durante a exposição dos grupos, outras questões poderão ser discutidas, como por exemplo:

- Porque os números apresentados na reta numérica foram apenas naturais? No conjunto solução poderia aparecer um número fracionário?
  Por quê?
- Poderia aparecer um número negativo como resposta?
  Por quê?

Esse é um bom momento para trabalhar a idéia de Conjunto Universo, como sendo o conjunto numérico no qual vamos buscar os elementos do conjunto solução. O contexto do problema fornece o conjunto universo.

Para prosseguir a discussão, distribua a cada aluno uma folha-tipo I-16 e peça que respondam as questões em grupos.

Comente as respostas dadas pelos alunos e proponha outras situações como por exemplo:

1.- O irmão mais velho de Lili têm 14 anos e o mais novo tem 3. O que podemos dizer a respeito da idade de Lili?

* Lili poderia ter 5 anos? E 5 anos e meio?
* Escreva uma sentença que representa a idade de Lili e dê exemplos de possíveis valores de x (idade de Lili).

PARTE 3: RESOLUÇÃO

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo II-16.

DESENVOLVIMENTO:

Entregue a cada aluno uma folha-tipo II-16. Nela os alunos encontrarão os quadros com as propriedades da igualdade e da desigualdade. Oriente-os para que façam uma comparação entre os quadros.

Os alunos poderão concluir que as propriedades são semelhantes e que a única “novidade” ocorre quando multiplicamos ou dividimos os membros de uma desigualdade por um número negativo.

Diga então, que assim como nas equações usávamos as propriedades da igualdade para resolvê-las, nas inequações usamos as propriedades da desigualdades para encontrarmos o(s) valor(es) da incógnita que tornam verdadeira a sentença, ou seja, para determinarmos o conjunto solução.

Entregue então a folha-tipo II-16b e peça que completem o quadro nela apresentado, aplicando as propriedades já por eles conhecidas (ver folha-tipo II-16b).

Feita a tarefa, comente as respostas com os alunos e discuta com eles como ficaria o conjunto solução em cada caso, considerando como conjunto universo o Conjunto dos Números Racionais.

Isto feito, proponha a resolução de outras inequações variando o grau de dificuldade. Por exemplo:

a) $2 . x + 10 \leq 20$

b) $5 . y - 7 > 18$

c) $\frac{2 . x}{3} \leq 10$

d) $3 . x - 1 \geq 8 + 4 . x$

e) $7 . y - \frac{1}{2} > 0$

COMENTÁRIOS:

Ao trabalhar com o conjunto dos números racionais (Q), o aluno perceberá que é impossível enumerar todos os elementos do conjunto solução. Poderá então ser orientado para representar o Conjunto Solução, exibindo apenas alguns dos seus elementos.

Por exemplo, no caso de x < 4:

$$S = \left\{ ..., -2, ..., -1, ...\ \frac{-1}{2}, ..., 0, ..., 1, ..., \frac{3}{2}, ..., 2, ..., \frac{5}{2}, ..., \right\}$$

Comente as respostas apresentadas, o aluno poderá perceber que essa maneira de apresentar o Conjunto Solução, não é a mais prática e nem a mais conveniente, dado que entre dois números racionais existe sempre, outro número racional, diferente dos números apresentados.

Sem dúvida, esse é o momento apropriado para introduzir a representação de um conjunto através de uma propriedade característica do mesmo.

Voltando ao nosso exemplo, é possível que agora o aluno venha até a apreciar a possibilidade de representar o conjunto solução através de notações como:

x é um número racional e x é menor que 4.

FOLHA-TIPO I-16

Soluções.

Situação 1.

Joana convidou mais rapazes do que moças para uma reuniãozinha em sua casa. Mesmo faltando três dos rapazes convidados, o número de rapazes ainda era maior que o de moças que era 5.

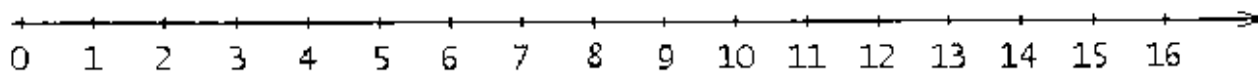
. O que você pode dizer a respeito do número de rapazes convidados?

. Com base nas informações acima, você acha que Joana poderia ter convidado 6 rapazes? E 7? Por quê?

. Quais das inequações a seguir, poderiam traduzir a situação considerando x o número de rapazes convidados:

$x - 3 >$	$x > 5 + 3$	$x > 8$

Os rapazes e as moças que Joana convidou são alguns dos seus colegas de classe do curso de inglês cujo número de alunos não ultrapassa 17.

. Faça uma marca azul nos números apresentados na reta abaixo que poderia representar a quantidade de rapazes convidados

OS NÚMEROS QUE VOCÊ FEZ MARCA AZUL, SÃO ELEMENTOS DO CHAMADO CONJUNTO SOLUÇÃO. E O REPRESENTAMOS DA SEGUINTE MANEIRA:

$$S = \{ 9, 10, 11, 12 \}$$

FOLHA-TIPO I-16a

E podemos fazer a leitura de várias maneiras:

1ª. S é o conjunto dos números naturais entre 8 e 13.

2ª. S é o conjunto dos números naturais maiores ou iguais a 9 e menores ou iguais a 12.

3ª. S é o conjunto dos números naturais maiores que 8 e menores que 13.

Situação 2.

Uma companhia de aviação esta selecionando moças para serem comissárias de bordo. Entre os quesitos exigidos, as candidatas devem ter altura mínima de 1,62 m e máxima de 1,75 m.

Débora conseguiu se inscrever porque atendia a todos os quesitos.

1.- Nas sentenças abaixo foi usada a letra x para representar a altura de Débora. Em qual delas estão representados os valores possíveis para x?

a) x é um número racional menor que 1,75.
b) x é um número natural maior que 1,62.
c) x é um número racional maior ou igual a 1,62 e menor ou igual a 1,75.
d) x é um número racional entre 1,62 e 1,75.

2.- Compare o problema da situação (1) com o problema da situação (2) e responda:

FOLHA-TIPO I-16b

. Quais são as semelhanças entre eles? E quais são as diferenças?

. Na situação 1, apresentamos o conjunto solução enumerando seus elementos: S = { 9, 10, 11, 12}. Seria possível usarmos esse mesmo procedimento no caso da situação (2)? Por quê?

. Você acha que poderia ter uma candidata selecionada com 1,66 m de altura? E com 1,689 m?

3.- Porque na situação (1) o conjunto universo trabalhado é o Conjunto dos números naturais e na situação (2) não?

QUAL É O CONJUNTO UNIVERSO DA SITUAÇÃO (2)?

FOLHA-TIPO II-16

Comparando propriedades.

Propriedade da igualdade:

Quaisquer que sejam os números a, b e c temos:

Se $a = b$, então $a + c = b + c$.

Se $a = b$, então $a - c = b - c$.

Se $a = b$, então $a \times c = b \times c$.

Se $a = b$, então $a : c = b : c$.

Propriedade da desigualdade:

Quaisquer que sejam os números a, b e c temos:

Se $a > b$, então $a + c > b + c$.

Se $a > b$, então $a - c > b - c$.

Se $a < b$, então $a + c < b + c$

Se $a < b$, então $a - c < b - c$.

Quaisquer que sejam os números a, b e c com $c > 0$, temos:

Se $a > b$, então $a \times c > b \times c$.

Se $a > b$, então $a : c > b : c$.

Se $a < b$, então $a \times c < b \times c$.

Se $a < b$, então $a : c < b : c$.

Quaisquer que sejam os números a, b e c com $c < 0$, temos:

Se $a > b$, então $a \times c < b \times c$.

Se $a > b$, então $a : c < b : c$.

Se $a < b$, então $a \times c > b \times c$.

Se $a < b$, então $a : c > b : c$.

FOLHA-TIPO II-16a

Resoluções.

Complete o quadro abaixo, aplicando as propriedades das desigualdades.

$\frac{x}{2} < 3$	$\frac{x}{2} \cdot 2 < 3.2$	$x < 6$
$3.x > 12$	$3.x \div 3 \ ... \ 12 \div 3$ ou $3 \cdot x \cdot \frac{1}{3} \ ... \ 12 \cdot \frac{1}{3}$	$x > 4$
$y - 5 < 10$	$y - 5 + 5 \ ... \ 10 + 5$	y ...
$y + 3 > 1$	y + 3 - ... > 1 - ...	y > ...
$-2.x > 4$	$-2.x \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) \ ... \ 4 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)$	x ...-2
$-x > 3$	$-x.(-1) \ ... \ 3.(-1)$	x ...
$7.y < 3$	....	....
$\frac{2}{3} \cdot x < \frac{1}{2}$	$\frac{2}{3} \cdot x \cdot \frac{3}{2} \ ... \ \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}$	....
$\frac{3}{4} \cdot w > \frac{2}{5}$	....	....
$\frac{5}{3} + x < 1$	....	....
$4 - 3.x < 7$	....	....

ATIVIDADE 17: INEQUAÇÕES, EQUAÇÕES E PROBLEMAS.

OBJETIVOS: Resolver problemas utilizando equações e inequações do primeiro grau.

PARTE 1: ANALISANDO ENUNCIADOS.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo I-17.

DESENVOLVIMENTO:

Divida a classe em grupos de 4 alunos e forneça a cada aluno uma folha-tipo I-17 (ou coloque os problemas na lousa).

Solicite a eles que leiam e discutam os enunciados dos problemas I, II e III, comparando-os e buscando semelhanças e diferenças entre eles.

A seguir, convide os grupos a apresentarem pelo menos uma solução para cada problema.

Dê um tempo para que executem a tarefa, após o que, faça um levantamento das soluções apresentadas. O que mais interessa nesse momento é:

- comparar a resolução apresentada por cada grupo, com a interpretação que ele deu ao enunciado;
- comparar as resoluções apresentadas pelos vários grupos; em particular, discutir os processos aritméticos ou algébricos que por ventura, aparecerem.

Caso nenhum grupo apresente soluções algébricas, ponha na lousa as seguintes sentenças, para que os alunos associem cada problema a pelo mesmo uma delas (a(s) que representa (m) sua melhor “tradução” algébrica):

a). $24 . x = 360$ f). $24 . x + 48 = 360$

b). $24 \ x \leq 360$ g). $360 = 24 . x – 48$

c). $24 = 360 . x$ h). $360 – 48 = 24 . x$

d). $24 + x = 360$ i). $24 . x + 48 \leq 360$

e). $24 + x + 48 = 360$ j) $x = \frac{360}{24}$

Dando prosseguimento, solicite aos grupos que escolham um dos três problemas, introduzam algumas modificação em seu enunciado, de modo que sua resolução seja modificada. Eles deverão apresentar a resolução para o novo problema.

Finalmente, peça a eles que escolham uma das sentenças anteriores que não foram ainda utilizadas e elaborem um enunciado de problema que seja traduzido por ela.

Incentive-os a compor um enunciado ligado a uma situação de seu cotidiano, se possível (mesmo porque, sempre se pode enunciar “qual é o número que ...”, quando nenhuma situação nos ocorre).

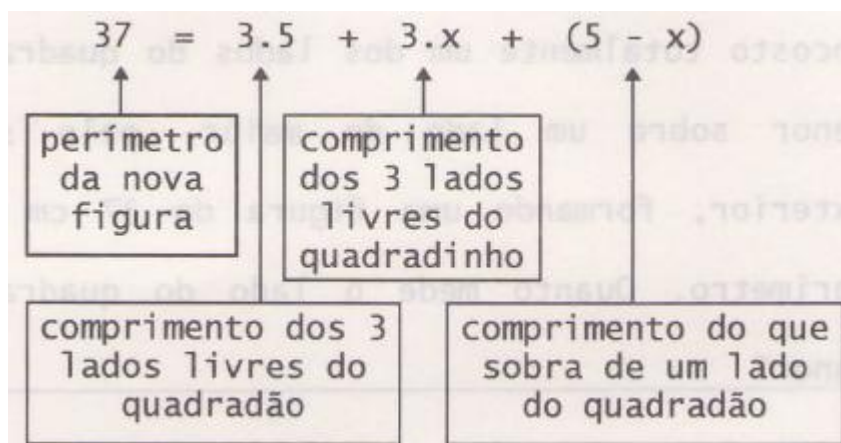
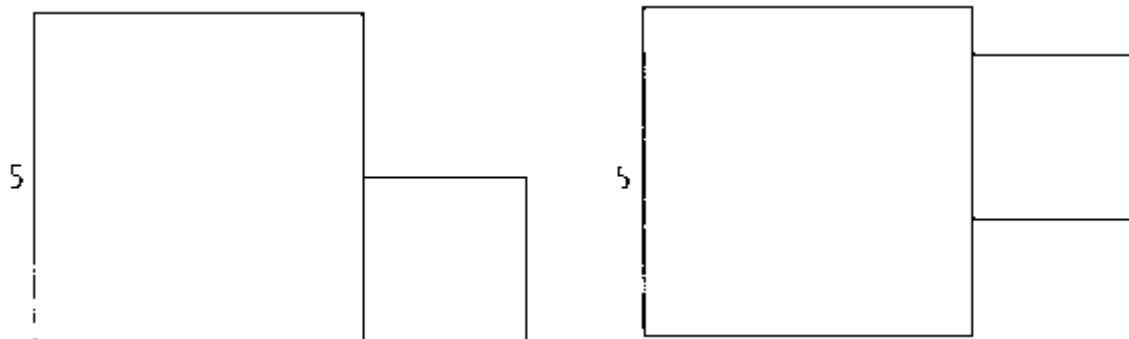
PARTE 2: VARIAÇÕES SOBRE UM MESMO TEMA.

MATERIAL NECESSÁRIO: Nenhum.

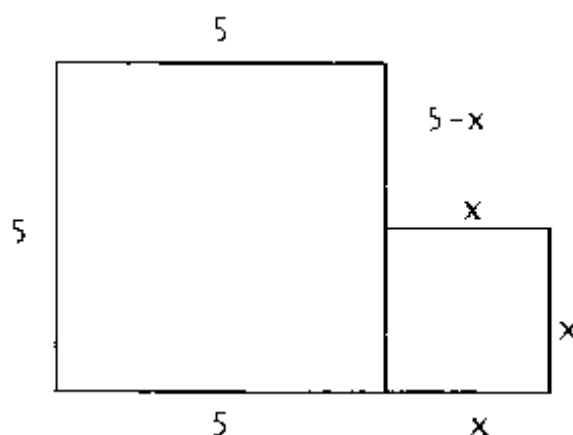
DESENVOLVIMENTO:

Proponha aos alunos os seguintes problemas:

1º Problema

Recorto dois quadrados em cartolina; o maior, com lado de 5 cm. Encosto totalmente um dos lados do quadrado menor sobre um lado do maior, pelo se exterior, formando uma figura de 37 cm de perímetro. Quanto mede o lado do quadrado menor?

Peças aos alunos que representem a situação do problema, o que poderá ser feito por meio dos recortes ou por meio de desenhos. É possível que apareçam representações diversas, como por exemplo:

Entretanto, eles deverão perceber que, em qualquer caso, o que "sobra" do lado encostado no quadrado grande é sempre 5 – x (utilizando uma linguagem algébrica), onde x esta representando a medida do lado do quadrado menor. Essa representação, talvez não seja imediata. Caso apareça uma expressão desse tipo na classe, coloque para todos os alunos uma discussão sobre ela (sua conveniência, sua representatividade, sua adequação).

A intenção é levar os alunos a compor uma equação para resolver o problema, que pode ser do tipo:

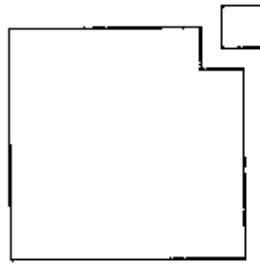
que corresponde à medidas, na figura

É possível que apareçam equações diferentes da anterior, como por exemplo:

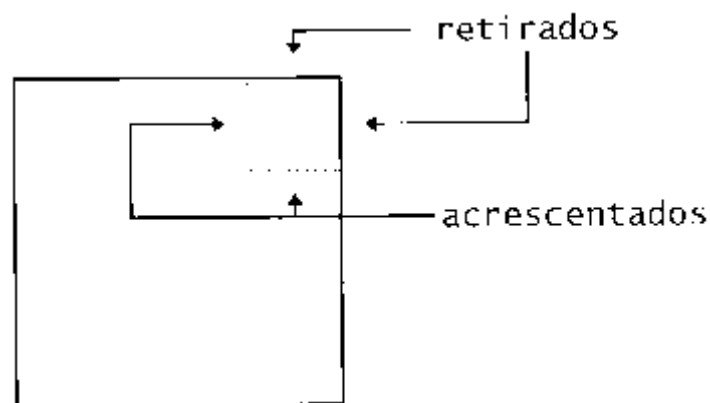
$$37 = 2 . 5 + (5 + x) + 2 . x + (5 – x)$$

É interessante, nesse momento, discutir a equivalência entre elas.

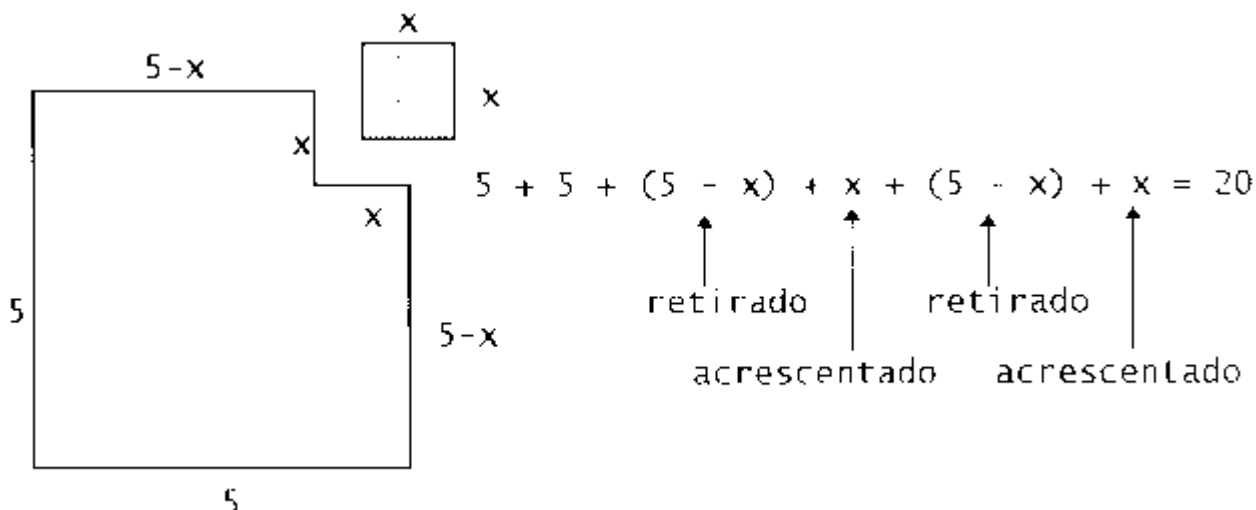
Cada aluno deverá decidir, então, qual a equação que utilizará para resolver o problema e ... resolvê-lo!

2º Problema.

Recorto um quadrado em cartolina; com lados de 5 cm.
Retiro de um de seus cantos, um quadrado menor, obtendo uma nova figura de 20 cm de perímetro.
Quanto mede o lado do quadradinho retirado?

Nesse caso, como a figura é fornecida aos alunos, alguém poderá perceber que qualquer quadradinho retirado do quadradão, fará surgir uma nova figura com perímetro de 20 cm, igual ao perímetro do quadradão.

Isso se deve ao fato de que os dois segmentos acrescentados na nova figura têm mesma medida dos que foram retirados com o quadradinho, o que não modifica o perímetro anterior.

Assim, a medida do lado do quadradinho retirado pode ser qualquer uma, desde que entre 0 e 5 cm.

Caso essa solução apareça logo no início, após discuti-la, os alunos poderão ser incentivados na procura de uma resolução algébrica para o problema e, nela, poderão identificar:

- onde aparece a “compensação” dos segmentos retirados e acrescentados.

- o significado de:

“o lado do quadradinho tem qualquer medida entre 0 e 5 cm”.

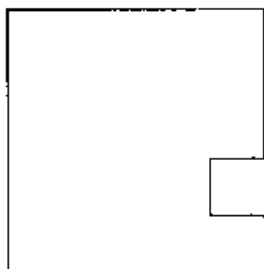
$$5 + 5 + (5 - x) + x + (5 - x) + x = 20$$

$$5 + 5 + 5 + 5 - x + x - x + x = 20$$

$$20 + 0 . x = 20$$

$0 . x = 0$, portanto x pode ser qualquer número que multiplicado por zero dá zero, desde que entre 0 cm (exclusive, pois o quadradinho existe) e 5 cm (exclusive, pois a figura que se forma existe). Portanto, estamos diante de uma equação com infinitas soluções.

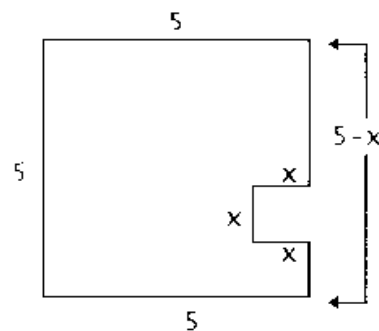
3º Problema:

Recorto, em cartolina, um quadrado com lados de 5 cm. Retiro dele um quadradinho menor, como no desenho, obtendo uma nova figura de 25 cm de perímetro. Quanto mede o lado do quadradinho retirado?

Quanto à essa terceira situação, cabem as mesmas considerações feitas no primeiro problema.

Uma mudança no perímetro da nova figura obtida, da margem a discussão oportunas, como por exemplo:

a) Se em vez de 25 cm, o perímetro da nova figura fosse 38 cm, quanto deveria medir o lado do quadradinho?

Nesse caso o problema não admite solução, apesar da equação ter uma raiz inteira.

$38 = 3 . 5 + (5 – x) + 3x$ e, portanto, $x = 9$, o que contraria as condições do problema, já que x deve ser uma medida positiva e menor que 5.

b) O perímetro da nova figura pode ser menor que, ou igual a 20?

E maior que, ou igual a 30? Por quê?

Nesses casos caímos nas inequações:

$20 + 2 . x \leq 20$ e $20 + 2 . x \geq 30$

respectivamente, o que nos dá para x valores negativos, no primeiro caso, e valores maiores que 5, no segundo caso, ambos, evidentemente fora do contexto do problema.

PARTE 3: ONDE ESTÁ O ERRO?

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo II-17.

DESENVOLVIMENTO:

Divida a classe em grupos de três alunos e forneça a cada um deles uma folha-tipo II-17.

Em cada grupo, um aluno deve ficar responsável pela correção de um problema da folha, o que será combinado entre eles. Após o trabalho individual de correção, o grupo discutirá os três problemas.

Após cada aluno efetuar as correções que julgar necessárias, os alunos do grupo discutirão os três problemas.

Numa segunda etapa, os alunos que corrigiram o problema 1 (bem como os problemas 2 e 3) se reunirão para confrontar as correções. Teremos, então, 3 grupos de alunos: o do problema 1, o do problema 2 e o do problema 3.

Cada um dos grupos elegerá um representante, que apresentará para a classe o problema de seu grupo, com comentários e correções.

COMENTÁRIOS:

Essa técnica de agrupar os alunos, inicialmente, em pequenos grupos, onde discutem todos os problemas, fortalece cada um deles na argumentação que será levada para o grupo maior.

Outro aspecto importante desenvolvido nessa atividade é que durante a correção efetuada pelo aluno, ele confronta seu próprio processo de resolução do problema, com o processo apresentado na folha. É nesse confronto, que o aluno justifica o que aprendeu e, além disso, procura aprender o que não conseguiu ainda justificar com seu repertório de conteúdos, técnicas e habilidades próprias.

Em outras palavras, a confirmação e a ampliação do que o aluno conhece, compõem um processo de reelaboração do conhecimento, imprescindível numa aprendizagem ativa.

Quanto aos erros cometidos na folha que receberam, os alunos deverão identificar a aplicação errada dos princípios aditivo e multiplicativo da igualdade, nos problemas 1 e 2, e a interpretação inadequada de $0 . x = 0$ no 3º problema (o que é facilmente detectável, pois algumas soluções particulares do problema são intuitivas – Paulo tem 6 e Rui tem 8 fitas, por exemplo).

FOLHA-TIPO I-17

PROBLEMA I:

Dona Eva saiu com 360 reais na carteira, que gastou totalmente na compra de vinho a 24 reais a garrafa. Quantas garrafas comprou?

PROBLEMA II:

Dona Eva saiu com 360 reais na carteira. Comprou vinho a 24 reais a garrafa. Quantas garrafas comprou?

PROBLEMA III:

Dona Eva saiu com 360 reais na carteira, e voltou com 48 reais. O dinheiro foi gasto na compra de vinho, a 24 reais a garrafa. Quantas garrafas comprou?

FOLHA-TIPO II-17

Problema 1: Uma loja de brinquedos comercializa três tipos de bonecas: as de R$ 10,00, as de R$ 20,00 e as de 50,00. Com R$ 420,00 compra-se uma quantidade de bonecas de R$ 10,00 igual à de bonecas de R$ 50,00 e uma quantidade de bonecas de R$ 20,00 que é quatro vezes a das bonecas de R$ 10,00. Quantas bonecas de cada preço são compradas?

Resolução: x representa a quantidade de bonecas de R$ 10,00, ou de R$ 50,00.

$$10 . x + 50 . x + 20. (4 . x) = 420$$
$$10 . x + 50 . x + 80 . x = 420$$
$$140 . x = 420$$
$$x = 420 – 140$$
$$x = 280 \quad e \quad 4 . x = 112$$

Resposta: são compradas 28 bonecas de R$10,00, 28 bonecas de R$ 50,00 e 112 de R$ 20,00.

Problema 2: Resolva a equação, sabendo que x deve ser o número racional:

$$x - \frac{3 . x}{4} - \frac{2 . x}{3} = 7$$

Resolução:
$$x - \frac{3 . x}{4} - \frac{2 . x}{3} = 7$$
$$12 . x - 12 . \frac{3 . x}{4} - 12 . \frac{2 . x}{3} = 7$$
$$12 . x - 9 . x - 8 . x = 7$$
$$- 5 . x = 7$$
$$x = 7/5$$

Resposta: a solução da equação é 7/5.

Problema 3: Paulo e Rui têm juntos 14 fitas de vídeo game. Quantas fitas tem cada um?

Resolução: x representa a quantidade de fitas de Paulo.
14 – x representa a quantidade de fitas de Rui

$$x + (14 – x) = 14$$
$$x + 14 – x = 14$$
$$x – x = 14 – 14$$
$$0 . x = 0$$

Resposta: O problema não tem solução.

ATIVIDADE 18: CONGRUÊNCIA DE FIGURAS.

OBJETIVOS: Identificar a correspondência entre elementos de figuras congruentes e, em particular, os casos de congruência de triângulos.

PARTE 1: SÃO CONGRUENTES OU NÃO?

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo I-18 e instrumentos de medida (transferidor, esquadro ou régua).

DESENVOLVIMENTO:

Distribua a cada aluno uma folha-tipo I-18 e solicite que meçam os ângulos internos e os lados de cada figura, anotando-as na tabela que consta dessa folha. Uma vez concluído o trabalho, peça a eles que escolham, dentre as afirmações abaixo, aquela(s) com a(s) qual(is) concorda(m), justificando sua escolha:

(A) DOIS POLÍGONOS SÃO CONGRUENTES, SE OS ÂNGULOS CORRESPONDENTES TÊM A MESMA MEDIDA.

(B) DOIS POLÍGONOS SÃO CONGRUENTES, SE OS LADOS CORRESPONDENTES TÊM A MESMA MEDIDA.

(C) DOIS POLÍGONOS SÃO CONGRUENTES, SE OS ÂNGULOS CORRESPONDENTES TÊM A MESMA MEDIDA E SE OS LADOS CORRESPONDENTES TAMBÉM TÊM A MESMA MEDIDA.

Comparando pares de figuras como por exemplo, 1 e 5, 3 e 4, os alunos devem concluir que a congruência de ângulos, apenas, não basta. Comparando pares de figuras como por exemplo, 2 e 5, 9 e 10, verificarão que a congruência de lados, apenas não basta, ou seja: é preciso conjugar os dois critérios. Por fim, pergunte que figuras dessa folha-tipo são congruentes.

PARTE 2: REDUZINDO O NÚMERO DE COMPARAÇÕES.

MATERIAL NECESSÁRIO: Nenhum.

DESENVOLVIMENTO:

Divida a classe em grupos e proponha os seguintes problemas na lousa, para serem discutidos.

Problema I:

Temos dois quadrados, para verificar se são ou não congruentes. Qual o número mínimo de comparações que precisamos fazer, para decidirmos se são ou não congruentes?

Problema II:

E o que acontece se estivermos comparando dois retângulos, não quadrados?

Problema III:

E se forem dois paralelogramos, não retângulos, qual o número mínimo de elementos a serem comparados e quais devem ser eles?

Os alunos irão percebendo, aos poucos, que, embora duas figuras congruentes tenham todos os lados correspondentes e todos os ângulos correspondentes, de mesma medida, em alguns casos não é necessário comparar todos esses elementos, um a um.

PARTE 3: FAZENDO CONSTRUÇÕES E DESCOBERTAS.

MATERIAL NECESSÁRIO: Instrumentos de desenho.

DESENVOLVIMENTO:

Individualmente, os alunos irão fazer construções cujos dados serão colocados na lousa:

a) Construir um triângulo, cujos lados meçam 2 cm, 3 cm e 4 cm.
b) Construir um triângulo, cujos ângulos meçam 30º, 90º e 60º.
c) Construir um triângulo, cujos lados medem 3 cm e 5 cm, de modo que o ângulo formado por esses dois lados seja de 45º.
d) Construir um triângulo, que tenha um lado de 6 cm e dois ângulos, um de 60º e outro de 40º, sendo que o lado de 6 cm é comum a esses dois ângulos.

Quando os alunos terminarem as construções, discuta com eles o que aconteceu em cada situação, anotando pontos importantes. Dentre

as observações, procure destacar:

1.- Na situação a), todos os alunos devem ter desenhado triângulos que, se sobrepostos, são congruentes, ou seja, conhecendo-se os três lados, já se conhece "tudo" sobre o triângulo, inclusive os ângulos.

2.- Na situação b), o fato de os ângulos terem sido dados não faz com que todos os triângulos desenhados sejam congruentes, certo?

3.- Na situação c), eram dados dois lados e o ângulo formado por eles; isso levou os alunos a desenharem triângulos congruentes entre si.

4.- Na situação d), eram conhecidos um lado e dois ângulos que tinham esse tal lado em comum; os triângulos obtidos também foram todos congruentes.

Comente com os alunos que até aqui já surgiram três dos chamados "casos de congruência de triângulos", nas situações a), c) e d), conhecidos por siglas que indicam quais os elementos estão servindo de base à comparação. São eles:

* L L L - lado, lado, lado.

SE DOIS TRIÂNGULOS TÊM OS TRÊS LADOS RESPECTIVAMENTE CONGRUENTES, ENTÃO ELES SÃO CONGRUENTES.

* L A L - Lado, ângulo, lado.

SE DOIS TRIÂNGULOS TÊM DOIS LADOS E O ÂNGULO COMPREENDIDO ENTRE ELES, RESPECTIVAMENTE CONGRUENTES, ENTÃO ELES SÃO CONGRUENTES.

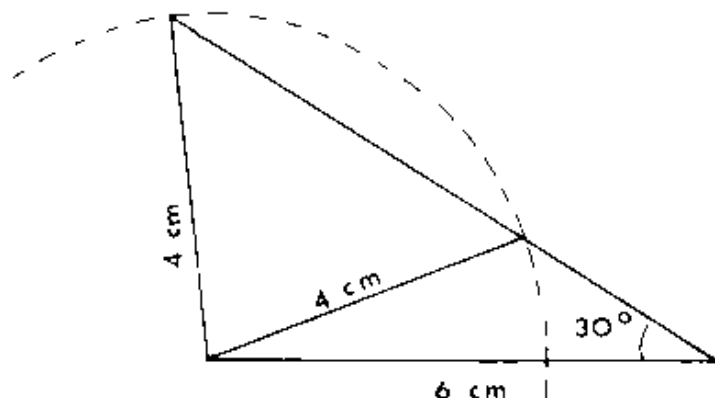
* A L A - ângulo, lado, ângulo.

SE DOIS TRIÂNGULOS TÊM UM LADO E DOIS ÂNGULOS A ELE ADJACENTES RESPECTIVAMENTE CONGRUENTES, ENTÃO ELES SÃO CONGRUENTES.

Ponha à classe a resolução de outros dois problemas de construção:

e). Construir um triângulo, que tenha lados medindo 6 cm e 4 cm e um ângulo de 30º que seja oposto ao lado de 4 cm. f). Construir um triângulo, que tenha um lado medindo 8 cm, um ângulo adjacente a ele que meça 60º e um ângulo oposto a ele, que meça 45º.

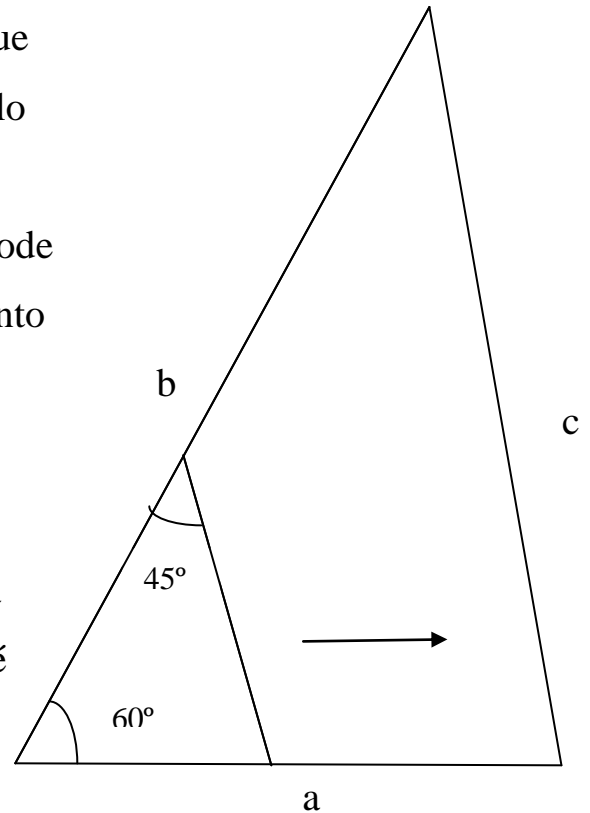
Dê um tempo para que os alunos façam suas tentativas e depois discuta com eles os procedimentos usados, chamando atenção para os seguintes fatos:

- Na situação e) há duas possibilidades de solução:

Isso mostra que comparar dois lados e um ângulo oposto a um deles não é suficiente para concluirmos sobre a congruência entre dois

triângulos.

- Na situação f) é provável que haja alguma dificuldade na construção do ângulo de 45º.

Mostre a eles que tal ângulo pode ser construído tendo como vértice, qualquer ponto "P" do lado "b" (ver figura) e depois, ser translado (por paralelismo) para a posição conveniente.

Embora essa construção possa ser feita de diferentes modos, o triângulo final é único.

* L A Ao – Lado, ângulo adjacente e ângulo oposto.

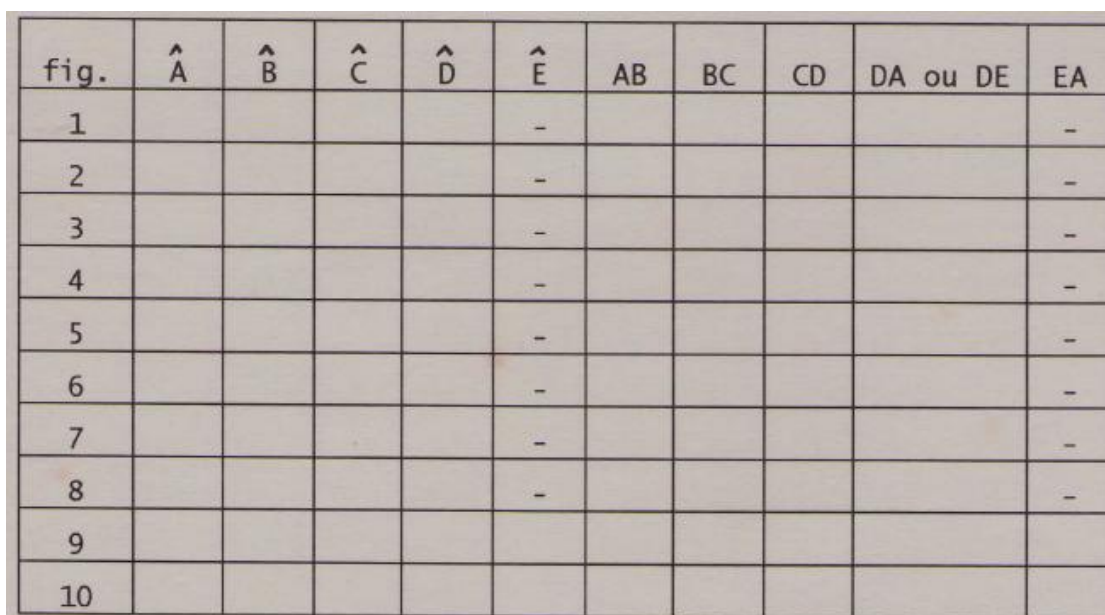
SE DOIS TRIÂNGULOS POSSUEM UM LADO, UM ÂNGULO ADJACENTE E O ÂNGULO OPOSTO A ESSE LADO, RESPECTIVAMENTE CONGRUENTES, ENTÃO ELES SÃO CONGRUENTES.

Para concluir, solicite aos alunos que retomem as soluções encontradas para a situação b, em que foi pedida a construção de triângulos, sendo dadas as medidas dos ângulos.

Esses triângulos não são necessariamente congruentes (a menos que haja coincidências). Mas eles têm algo em comum. O que é?

FOLHA-TIPO I-18

São congruentes ou não?

fig.	$\hat{A}$	$\hat{B}$	$\hat{C}$	$\hat{D}$	$\hat{E}$	AB	BC	CD	DA ou DE	EA
1					–					–
2					–					–
3					–					–
4					–					–
5					–					–
6					–					–
7					–					–
8					–					–
9										
10										

ATIVIDADE 19: TRIÂNGULOS E ALGUNS PONTOS NOTÁVEIS.

OBJETIVOS: Identificar as principais propriedades de circuncentro, baricentro, incentro e ortocentro em um triângulo qualquer.

PARTE 1: CONSTRUÇÕES E CONGRUÊNCIAS DE TRIÂNGULOS.

MATERIAL NECESSÁRIO: Régua, compasso.

DESENVOLVIMENTO:

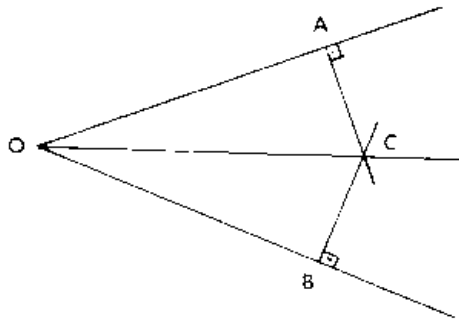
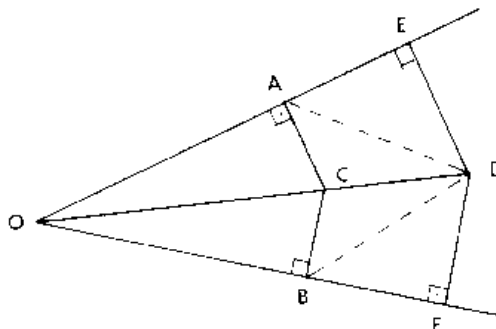
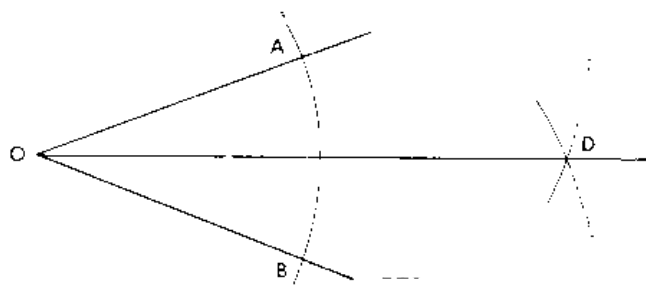
Comente com a classe que em algumas construções que eles já sabem fazer, com régua e compasso, podemos identificar triângulos congruentes. Para verificar isso, eles devem construir:

a) A mediatriz de um segmento de reta qualquer.
b) A perpendicular a um segmento de reta qualquer, por um ponto localizado fora dele.

Solicite que desenhem, numa folha de papel, um ângulo qualquer e proponha o seguinte problema:

TRAÇAS A BISSETRIZ DESSE ÂNGULO,
SEM USAR O TRANSFERIDOR,
MAS USANDO RÉGUA E COMPASSO.

Dê um tempo para que discutam métodos a serem usados.

Estimule a discussão comentando que os pontos pertencentes à bissetriz são pontos que têm a mesma distância dos dois lados do ângulo: as perpendiculares aos lados do ângulo, que passam por ponto da bissetriz formam os triângulos OAC e OBC. Pergunte à classe se são ou não congruentes.

"Passando a limpo" esse desenho, podemos marcar os pontos A e B, eqüidistantes de o, com ajuda do compasso. A seguir, levantamos perpendiculares por esses pontos, aos lados do ângulo, respectivamente. O ponto C, de encontro de ambas, pertence à bissetriz. Resta apenas traçar a semi-reta OC.

Outro procedimento simples, consiste em, uma vez marcado os pontos A e B, achar ponto D também eqüidistantes de A e B, que não está sobre as semi-retas perpendiculares AC e BC.

Proponha à classe, como exercício, traçar com o auxilio do transferidor ângulos adjacentes, com as seguintes medidas:

a) 20º e 160º b) 30º e 150º
c) 45º e 135º d) 60º e 120º

A seguir eles deverão obter as bissetrizes (com compasso) de cada ângulo desses pares e analisar os resultados obtidos, em particular, o perpendicularismo entre elas.

PARTE 2: MEDIATRIZ E CIRCUNCENTRO.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo I-19.

DESENVOLVIMENTO:

Com uma aula de antecedência, coloque na lousa o seguinte problema, para ser debatido pelos alunos, na aula seguinte:

TRACE UMA CIRCUNFERÊNCIA QUALQUER.
A SEGUIR, SEM DOBRÁ-LA, ENCONTRE O SEU CENTRO.

Na aula seguinte discuta com a classe as soluções apresentadas. Caso não surja solução adequada, não importa. Deixe o problema aguardando outro momento para ser solucionado.

Entregue a cada grupo de 4 alunos, uma folha-tipo I-19 que deverá ser recortada por eles, de modo que cada aluno fique com dois triângulos para trabalhar.

Proponha que tracem as mediatrizes de cada lado, em cada um dos triângulos (cada aluno construirá 6 mediatrizes). Se houver necessidade, retome o processo de construção de mediatrizes.

Feito o trabalho eles verificarão que as três mediatrizes se encontraram num dado ponto, em qualquer dos casos. Peça então, que procurem observar se esse tal ponto possui propriedades interessantes. É provável que os alunos percebam que a distância desse ponto a cada um dos vértices do triângulo é sempre a mesma ... e isso nos permite traçar uma circunferência, com centro em tal ponto, passando pelos três vértices do triângulo (quer dizer, é possível circunscrever a circunferência, ao triângulo).

Comente que é por esse motivo que esse ponto é chamado: CIRCUNCENTRO.

Faça com que comparem esse resultado, com o problema proposto no início desta atividade e enunciem um procedimento para achar o centro de uma circunferência dada.

PARTE 3: MEDIANAS E BARICENTRO.

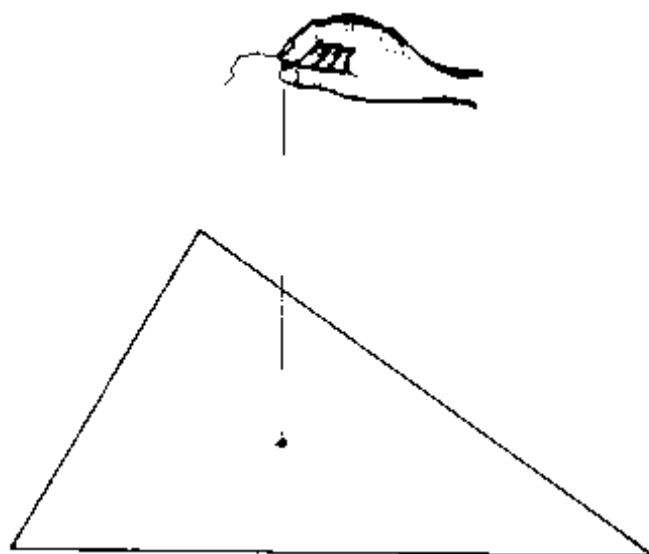
MATERIAL NECESSÁRIO: O mesmo usado na parte anterior.

DESENVOLVIMENTO:

Os alunos serão convidados a resolver o seguinte problema:

Desenhe um triângulo escaleno qualquer, num pedaço de papel cartão. A seguir, descubra em que ponto do seu interior você deve fazer um buraco para amarrar um barbante, de tal modo que, ao suspender o triângulo por esse barbante, ele se mantenha em equilíbrio (com o lado de baixo paralelo à horizontal). Anote na lousa as soluções pelos alunos, para o problema proposto. Se não surgir solução adequada não importa. Não forneça a solução. Peça aos mesmos grupos de alunos que reconstruam, numa folha de papel, os triângulos da folha-tipo I-19. Convide-os a traçar segmentos de reta que unam cada vértice do triângulo, ao ponto médio do lado oposto (para achar o ponto médio o processo é o mesmo usado para construir as mediatrizes), ou seja, as MEDIANAS do triângulo. Cada aluno trabalha com dois triângulos.

Terminado o trabalho, chame a atenção para o fato de que, em todos os casos, as medianas também se encontram num ponto. A tarefa agora é descobrir propriedades desse ponto. É provável que a classe perceba que ele é o "ponto de equilíbrio" procurado. É bom que façam seus testes. Apresente o nome de tal ponto:

BARICENTRO

Outra propriedade importante de ser analisada, caso os alunos não a observem, refere-se às medidas dos segmentos determinados pelo baricentro, sobre cada mediana. Chamando os vértices dos triângulos da folha-tipo I-19, de A, B e C, os pontos médios de D, E, e F, de modo que as medianas sejam AD, BE e CF, e o baricentro de G, organize com a classe uma tabela para anotar as medidas desse segmentos:

TRIÂNGULO	AG	GD	AG÷GD	BG	GE	BG÷GE	CG	GF	CG÷GF
(a)									
(b)									
(c)									
(d)									
(e)									
(f)									
(g)									
(h)									

Preenchida a tabela, na lousa, comente com os alunos que os resultados obtidos vêm sempre acompanhados de pequenos “erros”, mas que mesmo assim é possível observar alguma relação entre eles e concluir que:
O BARICENTRO DE QUALQUER TRIÂNGULO DIVIDE CADA UMA DE SUAS MEDIANAS EM DOIS SEGMENTOS CUJAS MEDIDAS ESTÃO NA RAZÃO DE 2 PAR 1 (OU DE 1 PARA 2, como queiramos).

Mais uma propriedade pode ser observada quanto ao traçado das medianas de um triângulo, ou seja, “cada mediana divide o triângulo em dois triângulos de mesma área”.

Estimule os alunos a observarem esse fato, através de perguntas como:

- Qual é a altura do triângulo ABC, relativamente à base BC?

- Qual é a altura do triângulo ABD, relativamente à base BD?

- Qual é a altura do triângulo ADC, relativamente à base DC?

- Como se calcula a área do Triângulo ABD?

- E a área do triângulo ADC?

Se achar conveniente, organize as conclusões, “passando a limpo” a demonstração desse teorema e identificando “tese, hipótese e demonstração”.

Discuta com eles: o fato de esses triângulos terem a mesma área, nos permite dizer que eles são congruentes? Por quê?

Peça aos alunos que, num triângulo qualquer, do qual já determinaram o baricentro, unam esse ponto a cada um dos vértices do triângulo, obtendo assim, três triângulos. E levante questões sobre a figura, tais como:

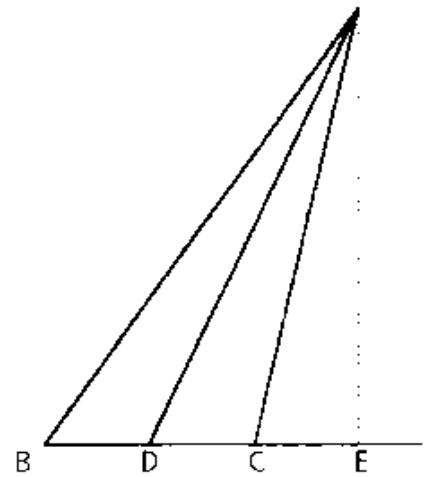
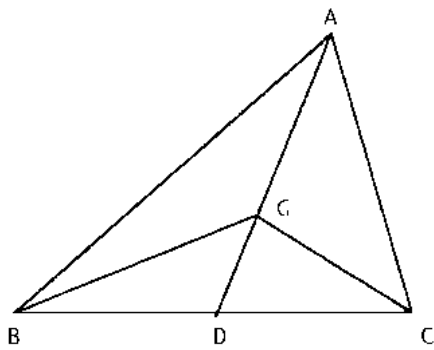
- O que podemos afirmar sobre as áreas dos triângulos ABD e ADC?

- O que o segmento GD representa no triângulo BGC?

- O que podemos afirmar sobre as áreas dos triângulos BGD e GDC?

- O que obtemos fazendo a diferença entre as áreas dos triângulos ABD e BGD?

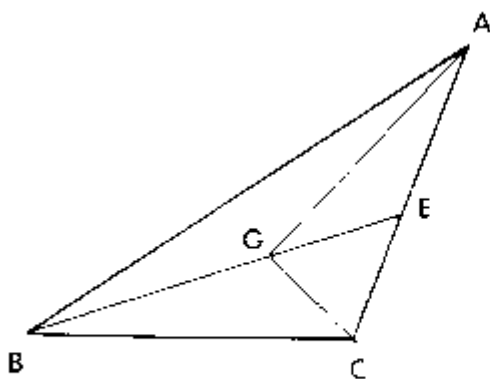
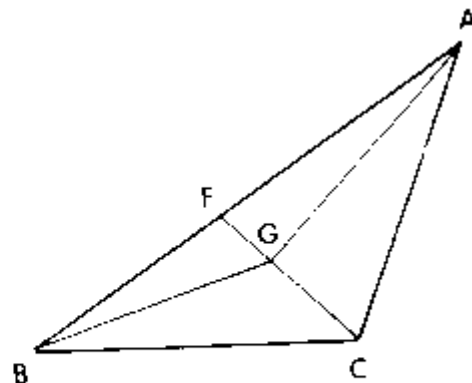
- O que obtemos fazendo a diferença entre as áreas dos triângulos ACD e CGD?

- O que podemos concluir a respeito das áreas de ABG e ACG? Por quê?

Área do Δ ABD = Área do Δ ADC

Área do Δ BGD = Área do Δ GDC

Área do Δ ABD – Área do Δ BGD = Área do Δ ADC – Área do Δ GDC

Área do Δ ABG = Área do Δ AGC.

Repetindo esse mesmo raciocínio para os triângulos determinados pelas medianas BE (ou CF), que conclusões você tira a respeito das áreas dos triângulos ABG e BCG (ou BGC e AGC)?

Proponha à classe, a solução de um problema, que será discutido na aula seguinte:

Construa um triângulo escaleno qualquer. Descubra que ponto do seu interior deve ser usado como centro de uma circunferência que tangencie cada um dos lados desse triângulo, ou seja, da circunferência inscrita nesse triângulo.

PARTE 4: BISSETRIZES E INCENTRO.

MATERIAL NECESSÁRIO: O mesmo usado na parte anterior.

DESENVOLVIMENTO:

Discuta com a classe as conclusões a que chegaram sobre o problema proposto. Rascunhando a solução, os alunos provavelmente perceberão que os segmentos que unem o centro da circunferência e os pontos de tangência, são respectivamente, perpendiculares aos lados do triângulo e tem todos a mesma medida (correspondente ao raio da circunferência).

Peça aos mesmos grupos de alunos que, usando os mesmos triângulos da folha-tipo I-19 tracem as bissetrizes de cada uma dos ângulos internos de cada triângulo. Se preciso, retome o processo de construção.

Os alunos poderão verificar que essas bissetrizes se encontram num ponto. Pergunte então, se esse ponto tem algo a ver com o problema proposto. Apresente o nome:

INCENTRO

e relacione-o com a circunferência inscrita.

PARTE 5: ALTURAS E ORTOCENTRO.

MATERIAL NECESSÁRIO: O mesmo usado nas partes anteriores desta atividade.

DESENVOLVIMENTO:

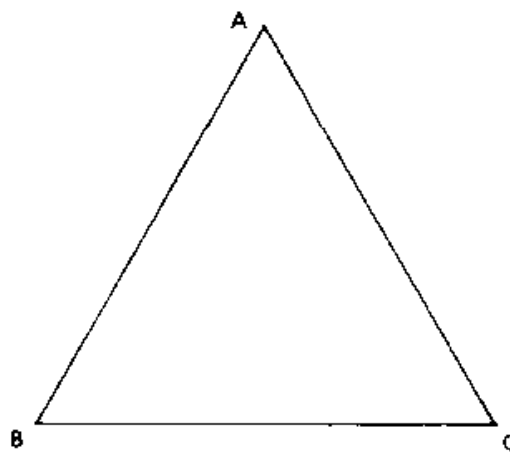
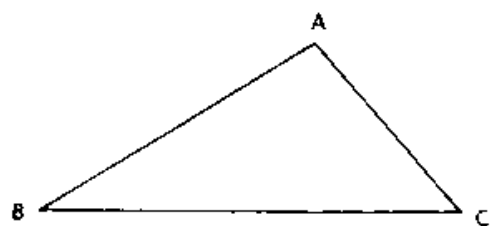
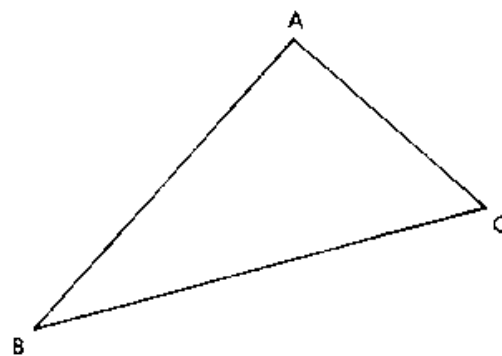
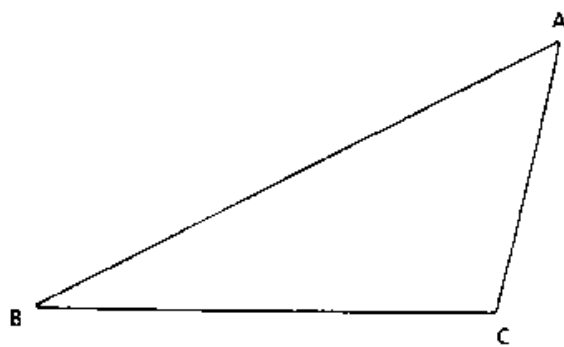
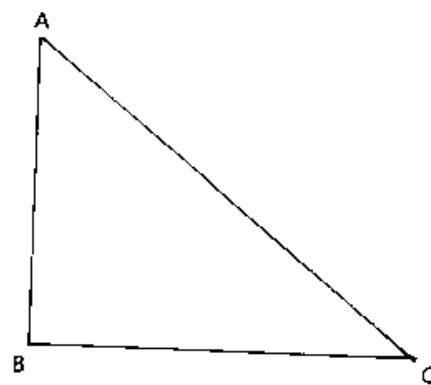
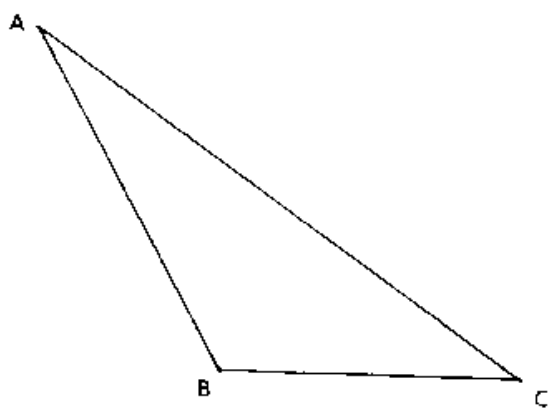
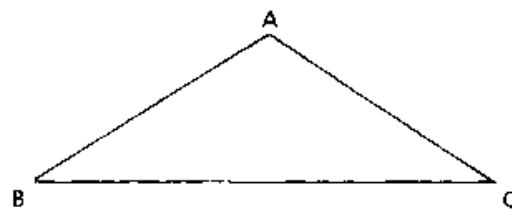
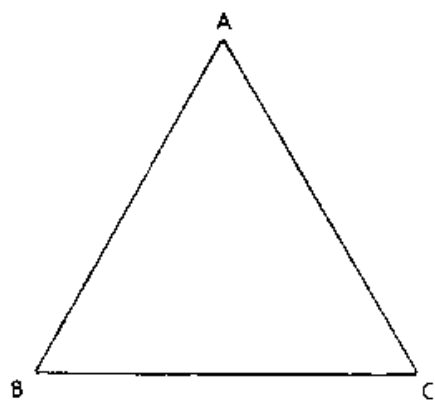
Mais uma vez serão usados os triângulos da folha-tipo I-19. Desta vez, os alunos serão solicitados a construir as 3 alturas de cada triângulo, relativamente a cada uma de suas bases. Auxilie-os, retomando essa construção na lousa.

A classe observará que as três alturas se encontram num ponto e você apresentara o nome desse ponto:

ORTOCENTRO.

Peça aos alunos que observem nas várias situações da folha-tipo I-19, se o circuncentro, o baricentro, o incentro e o ortocentro se localizaram internamente, externamente ou sobre um dos lados do triângulos e outras curiosidades ...

FOLHA-TIPO I-19

Mediatrizes e circuncentro.

ATIVIDADE 20: OUTRA VEZ A RELAÇÃO DE PITÁGORAS.

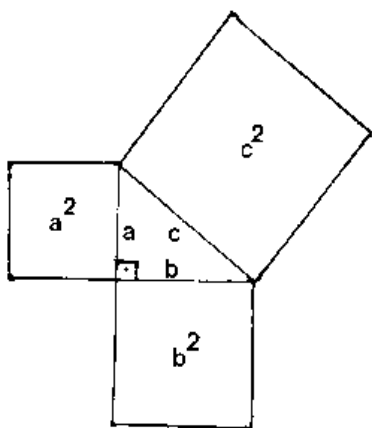
OBJETIVOS: Ampliar e aprofundar a compreensão sobre a relação de Pitágoras.

PARTE 1: UMA DEMONSTRAÇÃO PRESIDENCIAL.

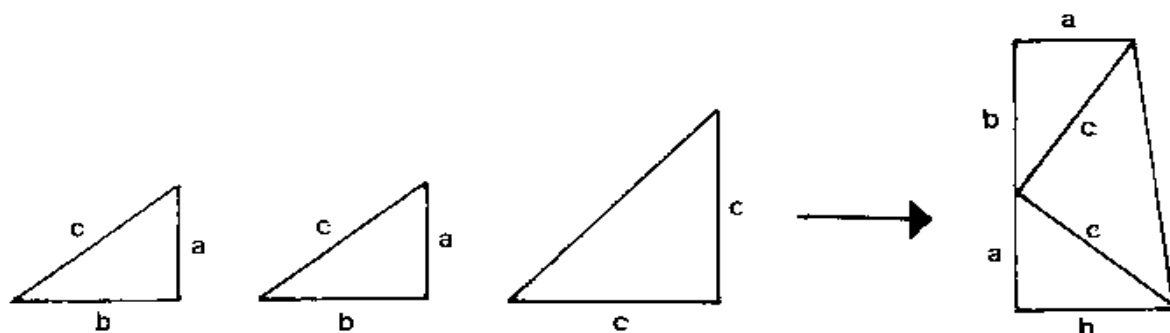
MATERIAL NECESSÁRIO: Nenhum.

DESENVOLVIMENTO:

Solicite aos alunos que desenhem um triângulo retângulo qualquer e que denominem as medidas dos catetos de a e b e da hipotenusa c. Peça também que construam os quadrados sobre os lados desse triângulo, bem como escrevam as expressões de suas áreas no interior de cada quadrado.

Poderão obter uma figura "bastante parecida" com:

Levando em conta as conclusões da atividade 6 (Relação Pitagórica: uma verificação experimental), que relação poderão escrever entre as áreas dos quadrados?

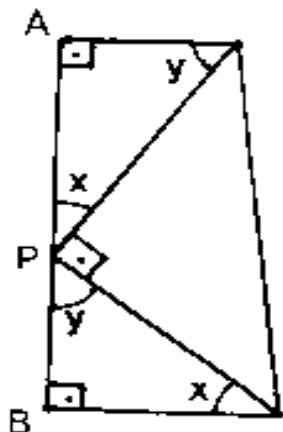
Explique a eles que a expressão $a^2 + b^2 = c^2$ é bastante utilizada para abreviar a propriedade das áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo.

Ao longo do tempo, muitos homens se interessaram em fazer uma demonstração dessa propriedade e entre eles, um general americano, James Abram Garfield, que foi por um curto período de tempo presidente do Estados Unidos. Ele se interessou pelo assunto e apresentou uma prova baseada numa figura com três triângulos retângulos, que formam um trapézio. Dois desse triângulos são iguais aqueles de lados a, b e c acima, e o terceiro é um triângulo retângulo isósceles de catetos c, que é a hipotenusa dos dois primeiros.

Questione também se os três triângulos dispostos como na figura anterior formam mesmo um trapézio.

Peça aos alunos que calculem as áreas do trapézio e dos triângulos que o compõem, para demonstrarem que $a^2 + b^2 = c^2$.

COMENTÁRIOS:

Num primeiro momento, as figuras envolvidas nessa demonstração podem ser recortadas em papel como peças de um quebra-cabeça. É importante comentar que não é pelo fato de que as peças recortadas aparentemente formam um trapézio, que devemos acredita nisso. O

questionamento principal deve ser feito em torno dos três ângulos ao redor do ponto P (figura seguinte).

Como x e y são ângulos complementares por serem ângulos agudos do triângulo retângulo dado, então somam 90º. Com mais 90º do ângulo reto do triângulo isósceles retângulo, temos 180º e, portanto, os pontos A, P e B estão alinhados.

PARTE 2: OUTRA MANEIRA DE OLHAR PARA A RELAÇÃO PITAGÓRICA.

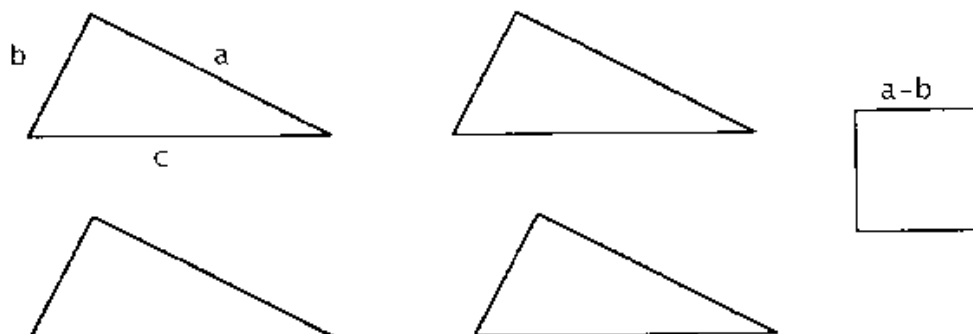
MATERIAL NECESSÁRIO: Folha de cartolina, tesoura, régua, esquadro

DESENVOLVIMENTO:

Divida a classe em grupos de quatro alunos. Cada grupo deverá dispor de uma coleção do material acima descrito.

Informe a eles que farão uma outra atividade para mostrar que $a^2 + b^2 = c^2$, onde a e b são as medidas dos catetos de um triângulo retângulo e c a medida da hipotenusa.

Para tanto eles deverão construir um triângulo retângulo qualquer (as medidas de seus lados não importam, basta que tenha um ângulo reto), e em seguida mais três outros triângulos iguais ao primeiro.

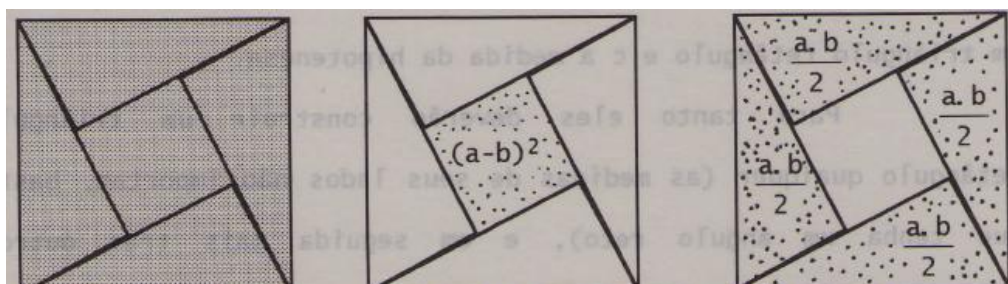
Solicite que construam também um quadrado cujo lado seja a diferença dos catetos dos triângulos retângulos já construídos (isto é, a – b, com a > b).

Com as cinco peças recortadas os alunos deverão montar um quadrado de lado c.

Dê um tempo para que formem a figura solicitada e em seguida peça a eles que calculem as áreas das cinco peças e a do quadrado de lado c, relacionando-as posteriormente.

Por equivalência de áreas deverão chegar a mostrar que $a^2 + b = c^2$.

COMENTÁRIOS:

Oriente os alunos para denominarem as medidas dos catetos de a e b enquanto que a hipotenusa será chamada de c.

Após terem conseguido compor o quadrado de lado c, deverão perceber que:

A partir dessa igualdade, basta efetuar os cálculos, para concluir que $a^2 + b^2 = c^2$.

O que ocorre quando a = b.

PARTE 3: LADO X DIAGONAL.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo I-20.

DESENVOLVIMENTO:

Distribua a cada aluno uma folha-tipo I-20.

Peça a eles que meçam as diagonais dos quadrados e organizem essas medidas numa tabela do tipo:

medida do lado do quadrado (cm)	diagonal medida (cm)	diagonal calculada	
		medida aproximada (cm)	medida exata (cm)
1			
2			
3			
4			
4,5			
5			
6			

As outras duas colunas deverão ser preenchidas, por meio de cálculos que efetuarão, a partir da relação de Pitágoras.

Colocar em discussão o que se deve entender por valor aproximado (na forma decimal) e por valor exato (na forma de radical).

Observar com os alunos que se a representação de um número apresenta infinitas casas decimais, ao considerarmos apenas uma quantidade finita dessas casas (como no caso da diagonal medida), estamos cometendo um certo erro, que será tanto menor, quanto mais casas decimais considerarmos. Por exemplo, tomar 0,444 para representar $\frac{4}{9}$, em vem de 0,444... ou 1,4142 para representar $\sqrt{2}$. Por outro lado, se representamos esse número por uma fração ($\frac{4}{9}$, no primeiro exemplo) ou por radical ($\sqrt{2}$), Como é o caso da medida calculada nesta atividade, estaremos considerando todas suas infinitas casas decimais; em outras palavras, estaremos considerando o valor exato desse número, sem cometer erro algum.

Entretanto, nem sempre é possível lidarmos com os valores exatos. Quem iria pedir no depósito de materiais de construção “ quero $3.\sqrt{2}$ m de rodapé”?

Após essa discussão em que os alunos poderão ser incentivados a explicitarem em que situações é mais conveniente utilizar uma forma ou outra (a exata ou a não exata), solicite a eles que respondam à pergunta.

Observando a primeira e a última coluna da tabela, que relação existe entre as medidas do lado do quadrado e de sua diagonal?

Não se trata, nesse momento, de introduzir os números irracionais; basta considerar a radiciação como uma relação inversa da potenciação e uma calculadora fará o resto, isto é, com ela, o aluno determina os valores obtidos na forma decimal aproximada.

PARTE 4: PITÁGORAS, CARPINTEIROS, ANTENISTAS E AS CRIANÇAS.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo II-20.

DESENVOLVIMENTO:

Divida a classe em grupos de três alunos e forneça a cada grupo uma folha-tipo II-20.

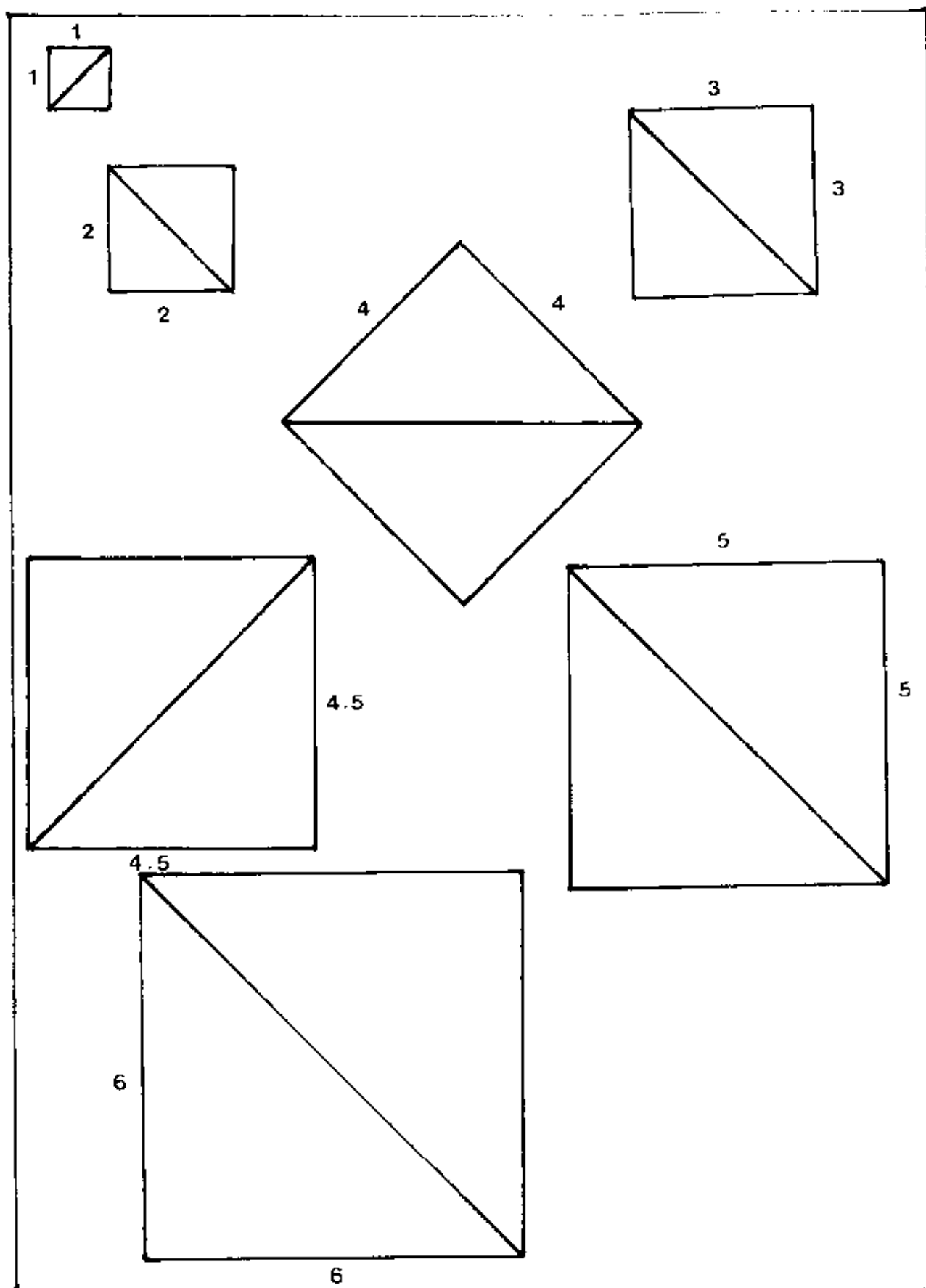
Dê um tempo para que resolvam os problemas.

A seguir, promova uma discussão com a classe sobre as soluções apresentadas pelos diversos grupos.

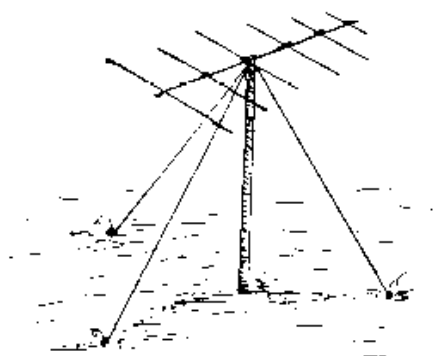
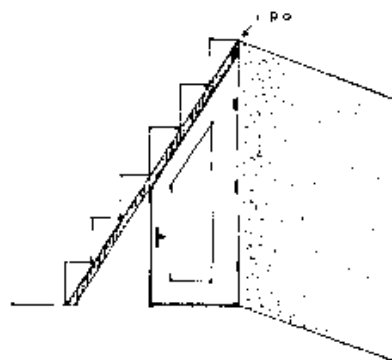
COMENTÁRIOS:

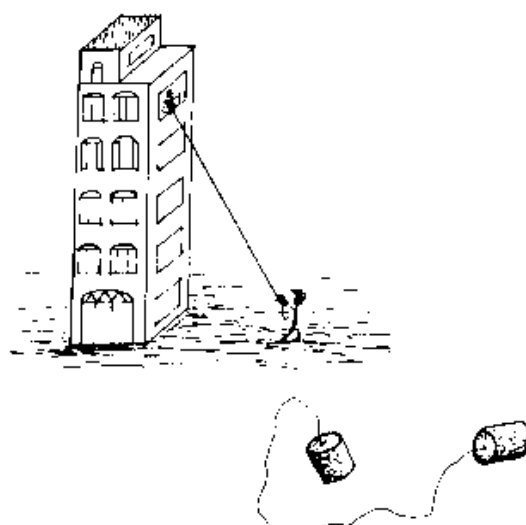
Embora os alunos tenham apenas os primeiros contatos com a relação de Pitágoras, é possível propor algumas aplicações. Inicialmente, elas estão ligadas a situações bastante concretas, como é o caso deste três problemas; posteriormente, aplicações mais abstratas serão tratadas em atividade da 8ª série.

FOLHA-TIPO I-20

Lado X diagonal.

FOLHA-TIPO II-20

Pitágoras, carpinteiros, antenistas e crianças.

Sob os cinco degraus de uma escada interna de uma casa foi feito um armário e, para arrematá-lo, o carpinteiro usou uma ripa de madeira. Como cada degrau tinha 25 cm de largura e 20 cm de altura, quantos metros de ripa o carpinteiro utilizou?

Para fixar uma antena de TV de 12 m de altura, um antenista prendeu três cabos de metal no topo e no solo, a 5 m de seu pé. Gastou 1,80 m para fazer as amarras. Quantos metros de cabo o antenista comprou?

Para se comunicar, Paulo e João fizeram um telefone de barbante com 17 m de fio. Paulo ficou na janela do apartamento a 16,5 m de altura. Esticaram o barbante e pronto, começaram a falar. A que distância do prédio João se colocou, se seu ouvido estava a 1,5 m do chão?

ATIVIDADE 21: ESTENDENDO O CONCIETO DE POTÊNCIA.

OBJETIVOS: Calcular potência de números racionais com expoentes negativos.
Aplicar as propriedades de potência no cálculo das potências com expoentes inteiros.

PARTE 1: OS EXPOENTES NEGATIVOS.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo I-21.

DESENVOLVIMENTO:

Para a introdução dos expoentes negativos, que serão vistos como uma notação conveniente de números fracionários, é necessário que os alunos já tenham estudado potência com números naturais. Se for preciso, faça uma revisão.

Em seguida, distribua uma folha-tipo I-21, para cada aluno.

PARTE 2: APLICANDO PROPRIEDADES DE POTÊNCIAS.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo II-21.

DESENVOLVIMENTO:

Distribua uma folha-tipo II-21, para cada aluno.

PARTE 3: USANDO POTÊNCIAS DE 10.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo III-21.

DESENVOLVIMENTO:

Diga aos alunos que para facilitar a escrita de números com muitos dígitos podemos utilizar potências de 10.

Em seguida peça-lhes que:

1). Escrevam usando potência de base 10 os seguintes números.

a) 1.000.000

b) 0,0001

2). Preencham as tabelas.

Potência de 10	10^3	10^5			
Escrita decimal	1000		10000	1000000	100
Números de zero					

Potência de 10	10^{-2}	10^{-4}			10^{-6}
Escrita decimal	0,01		0,001	0,00001	
Números de zero					

3). Tentem escrever uma regra para obter potências de 10.

a) Com expoentes positivos.

b) Com expoentes negativos.

Peça aos alunos que observem as informações seguintes em que as escritas numéricas são representadas por números com muitos dígitos e

como essas escritas ficariam se usássemos potência de 10.

a) O diâmetro do Sol é 1.390.000 km, aproximadamente.

$1.390.000 = 139 \times 10.000 = 139 \times 10^4$.

b) A velocidade da luz é, aproximadamente, 300.000.000 m/s

$300.000.000 = 3 \times 100.000.000 = 3 \times 10^8$.

c) A espessura de um vírus é mais ou menos 0,0005 mm

$0,0005 = 5 \times 0,0001 = 5 \times 10^{-4}$.

d) O raio de um átomo é, aproximadamente, 0,00000000005 mm

$0,00000000005 = 5 \times 0,00000000001 = 5 \times 10^{-11}$.

Após estas explicações, distribua uma folha-tipo III-21 para cada aluno.

PARTE 4: NOTAÇÃO CIENTÍFICA.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo IV-21.

DESENVOLVIMENTO:

Usando potência de 10, um número pode ser escrito de várias maneiras. Exemplos:

1) Escrevendo 135000000, usando potência de 10:

a) $135000000 = \frac{135000000}{1000} \times \underbrace{1000}_{10^3}$.

(Dividindo e multiplicando 135000000 por 1000)

$135000000 = 135000 \times 10^3$.

10^3 ↓

b) $135000000 = \frac{135000}{1000} \times 1000 \times 10^3 = 135 \times 10^3 \times 10^3$.

$135000000 = 135 \times 10^6$

c) $135000000 = \underline{\ 135\ } \times 10 \times 10^6 = 135.000.000 = 13{,}5 \times 10^7$.

d) $135000000 = \frac{13{,}5}{10} \times 10 \times 10^7$.

2) Escrevendo 0,0132, usando potência de 10:

a) $0{,}00132 = 0{,}00132 \times 10 \times \frac{1}{10} =$

↑ 10^{-1}

$0{,}00132 = 0{,}0132 \times 10^{-1}$

10^{-1} ↓

b) $0{,}00132 = 0{,}0132 \times 10 \times \frac{1}{10} \times 10^{-1} = 0{,}132 \times 10^{-1} \times 10^{-1}$.

$0{,}00132 = 0{,}132 \times 10^{-2}$.

c) $0{,}00132 = 0{,}132 \times 10 \times \frac{1}{10} \times 10^{2}$.

↑ 10^{-1}

$= 1{,}32 \times 10^{-1} \times 10^{-2}$.

$0{,}00132 = 1{,}32 \times 10^{3}$.

Como podemos ver, várias são as maneiras de escrever um número, usando potência de 10. No entanto, muitos cálculos com números com muitos dígitos são facilitados se trabalharmos com eles sob uma forma padrão. Por isso, nos trabalhos científicos e de engenharia, esses números são

escritos como produto de um número entre 1 e 10 e uma potência de 10, ou seja:

(um número entre 1 e 10) x (potência de 10).

O fato de escolher um número entre 1 e 10 é por conveniência. Se não houvesse esta restrição, existiriam muitas maneiras de escrever o número em forma de potência de 10, como já foi visto.

Assim para escrever 150.000.000 em notação cientifica, procedemos da seguinte forma:

$1\,50.000.000 = 1{,}5 \times 10^{8}$

8 algarismos

Vemos que a vírgula descola-se do último algarismos, para a esquerda, 8 casas decimais, e o 8 é expoentes de 10.

$0{,}\ 0008\ 1 = 8{,}1 \times 10$

4 algarismos

Vemos que a vírgula desloca-se, para a direita, 4 casas decimais e – 4 é expoente de 10.

Distribua uma folha-tipo IV-21 para cada aluno

FOLHA-TIPO I-21

Os expoentes negativos.

No quadro seguinte estão calculadas algumas potências de 2, complete as que faltam. Você pode observar que os expoentes decrescem de 1 em 1 e as potências são divididas por 2.

E agora?

$2^4 = 16$
$2^3 = 8$
$2^2 = 4$
$2^1 = ...$
$2^0 = ...$
$2^{-1} = ...$
$2^{-2} = ...$

Se você escreveu $2^{-1} = 1 : 2$, ou $2^{-1} = \frac{1}{2}$, e

$$2^{-2} = \frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2^2}$$

podemos dizer que adotar esta notação é conveniente, para que as propriedades de potências se mantenham para o caso de expoente negativos.

Assim, além da notação decimal 0,5, a fração $\frac{1}{2}$ tem a notação 2 , em que usamos expoente negativo.

$$\frac{1}{2} = 2^{-1}$$

É também conveniente identificar:

$$\frac{1}{2^2} = 2^{-1}$$

FOLHA-TIPO I-21a

Agora, observe a regularidade em relação aos expoentes e em relação aos resultados das potências e completem as igualdades, na seqüencia seguinte:

$2^4 = 16$ $2^3 = 8$ $2^2 = 4$ $2^1 = 2$

$2^0 = 1$ $2^{-1} = \frac{1}{2}$ $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ $2^{-4} = \frac{1}{2^{\cdots}} = \frac{1}{\ldots}$

$2^{-5} = \ldots. = \ldots.$ $2^{-6} = \ldots..$

$2^{-10} = \ldots\ldots\ldots.$ $2^{-n} = \ldots\ldots\ldots$

Por conveniência, da mesma forma que no cálculo das potencias de base 2, em que identificamos $2^{-n} = \frac{1}{2^n}$, de um modo geral

Escrevemos:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Esta notação vale para qualquer número racional a, diferente de zero, e qualquer número inteiro n. Exemplos:

a) Se a = 5 e n = 4 temos $5^{-4} = \frac{1}{5^4}$

b) Se a = (- 2) e n = 6 temos $(-2)^{-6} = \frac{1}{(-2)^6}$

Continue, completando as igualdades.

a) $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{\ldots}$

b) $(-5)^{-4} = \frac{1}{(-5)^{\cdots}} = \frac{1}{\ldots}$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-5} = (3^{-1})^{-5} = 3^{(-1) \times (-5)} = 3^{\cdots}$,

Ou seja: $\left(\frac{1}{3}\right)^{-5} = 3^{\cdots\cdots}$.

FOLHA-TIPO I-21b

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{\cdots}} = 1 : \left(\frac{2}{3}\right)^{\cdots} = 1 : \frac{2^{\cdots}}{3^{\cdots}} = 1 \times \frac{3^{\cdots}}{2^{\cdots}} = \frac{3^{\cdots}}{2^{\cdots\cdot}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\cdots}$

ou seja: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\cdots}$

FOLHA-TIPO II-21

Aplicando propriedades de potências.

As potências de bases iguais têm algumas propriedades.

Produto de potência com bases iguais.

Vamos mostrar que o produto $3^3 \times 3^2$, pode ser transformado em uma só potência.

Ou seja: $3^3 \times 3^2 = 3^{3+2} = 3^5$.

Como $3^3 = 3 . 3 . 3$ e $3^2 = 3 . 3$, podemos escrever:

$3^3 . 3^2 = (3 . 3 . 3) . (3 . 3) = 3 . 3 . 3 . 3 . 3 = 3^{3+2}$

3 três 2 três (2 + 3) três

Agora é com você, mostre que $2^2 \times 2^4 = 2^{2+4}$

Complete as igualdades

a) $a^2 . a = a . a . a = a^{...} = a^{2+1}$

b) $a^2 . a^3 = a . a \; . \; a . a . a = a^{...} = a^{... + ...}$

Vamos verificar esta propriedade para expoentes negativos:

$a^3 . a^{-2} = a^{3+(-2)} = a^1$

Como $a^3 = a . a . a$ e $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, podemos escrever:

$$a^3 . a^{-2} = a . a . a . \frac{1}{a^2} = \frac{a . a . a}{a . a}$$

Cancelando os fatores comuns, temos:

$$a^3 . a^{-2} = \frac{\not{a} . \not{a} . a}{\not{a} . \not{a}} = a^1 = a^{3+(-2)}$$

FOLHA-TIPO II-21a

Agora é com você. Mostre que:

$$a^{-4} . a^{2} = a^{(-4)+2} = a^{-2} .$$

Complete: $a^{-7} . a^{-6} = a^{\dots + \dots} = a^{\dots}$

<u>Quociente de potências com bases iguais</u>.

Vamos mostrar que o quociente $3^4 : 3^2$ pode ser transformado em uma só potência.

Ou seja: $3^4 : 3^2 = 3^{4-2} = 3^2$.

Como $3^4 = 3 . 3 . 3 . 3$ e $3^2 = 3 . 3$, podemos escrever:

$$3^4 : 3^2 = (\underbrace{3 . 3 . 3 . 3}_{\text{4 três}}) : (\underbrace{3 . 3}_{\text{2 três}}) = \frac{3 . 3 . 3 . 3}{3 . 3 . 3}$$

4 três 2 três

Calculando os fatores comuns:

$$3^4 : 3^2 = \frac{3 . 3 . 3 . 3}{3 . 3} = 3^2 = 3^{4-2}.$$

Agora é com você. Complete:

a) $a^5 : a^2 = \frac{a^5}{a^2} = \frac{a . a . a . a . a}{a . a} = a^{\dots} = a^{5-2}$

b) $a^3 : a^{-2} = a^3 : \frac{1}{a^2} = a^3 \times \frac{a^2}{1} = a^3 \times a^2 = a^{\dots} = a^{3-(-2)}$

c) $a^{-1} : a^{-4} = \frac{1}{a} : \frac{1}{a^4} = \frac{1}{a} \times \frac{a^4}{1} = \frac{a^4}{a} = \frac{\not{a} . a . a . a}{\not{a}} = a^{\dots} =$

$= a^{(-1)-(-4)} = a^{-1+4}.$

c) $a^4 : a^{-2} =$

<u>Potência de Potência</u>.

Vamos mostrar que a potência de potência $(3^5)^2$, pode ser transformada em uma só potência.

Ou seja: $(3^5)^2 = 3^{5 . 2} = 3^{10}$.

Como $(3^5)^2 = 3^5 \times 3^5 = 3^{5+5}$, podemos escrever:

$$(3^5)^2 = 3^{10}.$$

Agora é com você. Complete:

a) $(a^5)^2 = a^5 \times a^5 = a^{...+...} = a^{...} = a^{2 \cdot 5}$

b) $(a^{-2})^{4} = a^{-2} \times ... \times ... \times ... = a^{...} = a^{4 \cdot (-2)}$.

c) $(a^{-3})^{-3}$ = ...

Aplicando as propriedades de potências de bases iguais.

Usando a tabela ao lado, calcule:

a) $5^4 \cdot 5^{-2}$

b) $5^4 \cdot 5^6$

c) $5^6 : 5^{-2}$

d) $5^{-4} : 5^2$

e) $5^{-1} \cdot 5^{-2}$

f) $5^{-9} : 5^{-2}$

g) $(5^{2})^4$

h) $(5^{-1})^6$

i) $(5^{-3})^{-2}$

j) 0,008 x 15. 625

k) 125 : 0,008

5^{10} =	9.765.625
5^9 =	1.953.125
5^8 =	390.625
5^7 =	78.125
5^6 =	15.625
5^5 =	9.125
5^4 =	625
5^3 =	125
5^2 =	25
5^1 =	5
5^0 =	1
5^{-1} =	0,2
5^{-2} =	0,04
5^{-3} =	0,008
5^{-4} =	0,0016
5^{-5} =	0,00032
5^{-6} =	0,000064

FOLHA-TIPO III-21

Usando potência de 10.

1) Calcule os produtos, observe as regularidades em relação ao deslocamento da vírgula e os expoentes da base.

$3,16 \times 10 =$ .... $1,15 \times 10^2 =$ $3,16 \times 10^3 =$

$5 \times 10 =$ .... $16 \times 10^2 =$ $8 \times 10^3 =$

$0,0012 \times 10 =$ .... $8,133 \times 10^2 =$ $0,0003 \times 10^3 =$

Responda às questões:

a) Para multiplicar um número por 10 desloca-se a vírgula, da esquerda para direita, de quantas casas decimais?

b) Para multiplicar um número por 10^2 desloca-se a vírgula, da esquerda para a direita, de quantas casas decimais?

c) Para multiplicar um número por 10^3 desloca-se a vírgula, da esquerda para a direita, de quantas casas decimais?

2) Calcule os produtos, observe as regularidades em relação ao deslocamento da vírgula e aos expoentes da base 10.

$85,2 \times 10^{-1} =$ .... $5,32 \times 10^{-2} =$ .... $0,5 \times 10^{-3} =$ ....

$5 \times 10^{-1} =$ .... $1,8 \times 10^{-2} =$ .... $11838 \times 10^{-3} =$ ....

$0,3 \times 10^{-1} =$ $8,133 \times 10^{-2} =$ .... $0,0003 \times 10^{-3} =$ ....

Responda às questões:

a) Para multiplicar um número por 10^{-1} desloca-se a vírgula, da direita para esquerda, de quantas casas decimais?

b) Para multiplicar um número por 10^{-2} desloca-se a vírgula, da direita para esquerda, de quantas casas decimais?

c) Para multiplicar um número por 10^{-3} desloca-se a vírgula, da direita para esquerda, de quantas casas decimais?

FOLHA-TIPO IV-21

Usando notação científica para resolver problemas.

1). Escreva os dados numéricos das informações seguintes, em notação científica.

a). A população da China é, aproximadamente, 1 bilhão e 200 milhões de habitantes.

b). A bacia Amazônica é formada pelo Rio Amazonas e seus afluentes e ocupa uma área de 7.045.000 km^2, dos quais 4.750.000 km^2 estão em território brasileiro.

c). A velocidade da luz é cerca de 300.000 km por segundo.

d). A espessura da folha de papel é mais ou menos 0,0001 metros.

2). Resolva os problemas:

a). A massa de um elétron é aproximadamente $9{,}11 \times 10^{-28}$ gramas e a massa do próton é aproximadamente $1{,}678 \times 10^{-24}$ gramas. Qual é a massa maior, a do elétron ou a do próton? Compare-as calculando a razão entre a massa do elétron e a do próton:

$$\frac{9{,}11 \times 10^{-28}}{1{,}67 \times 10^{-24}}$$

b). A população da China é, aproximadamente 1 bilhão e 200 milhões de habitantes e a do Brasil é aproximadamente 130 milhões. Quantas vezes a população da China é maior que a população brasileira?

c). Qual a distância que a luz percorre em 10 minutos?

d). A velocidade do som, no ar é, aproximadamente, 340 metros por segundo. Qual é a distância que o som percorre em um dia?

ATIVIDADE 22: IDENTIFICANDO POLINÔMIOS.

OBJETIVOS: Identificar polinômios como generalizações das operações e propriedades dos números já estudados.

PARTE 1: POLINÔMIOS.

MATERIAL NECESSÁRIO: Nenhum.

DESENVOLVIMENTO:

Se for o caso, retome o estudo de monômios, com o significado que se dá a multiplicação como soma reiterada de parcelas iguais ou seja: $a^2 + a^2 + a^2 = 3 . a^2$.

A partir de exemplos do tipo:

$$3 . a^2 + 2 . a^2 = \underbrace{(a^2 + a^2 + a^2)}_{3 . a^2} + \underbrace{(a^2 + a^2)}_{2 . a^2} = 5 . a^2$$

Relembre-os que, quando os monômios têm a mesma parte literal, basta somar algebricamente seus coeficientes e conservar a parte literal comum, fato que é garantido pela validade da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

$$3 . a^2 + 2 . a^2 = (3 + 2) . a^2 = 5 . a^2 .$$

A multiplicação e a divisão de dois monômios, podem estar vinculados às regras de simplificação no cálculo com potências e às propriedades das operações.

Exemplos:

$$3 \cdot a^2 \cdot 2 \cdot a^3 = (3 \cdot 2) \cdot a^2 \cdot a^3 = 6 \cdot a^{2+3} = 6 \cdot a^5 .$$

Produto de potência de bases iguais.

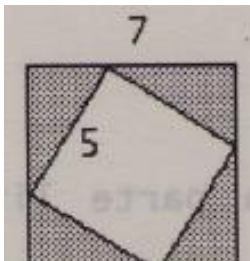
$$(3 \cdot x^5) : (2 \cdot x^2) = (3 : 2) \cdot x^5 : x^2 = \frac{3}{2} \cdot x^{5-2} = \frac{3}{2} \cdot x^3$$

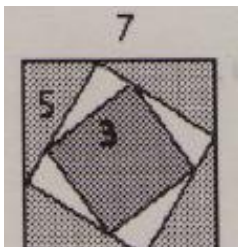
Quociente de potência de bases iguais

Após esta revisão proponha à classe os seguintes problemas:

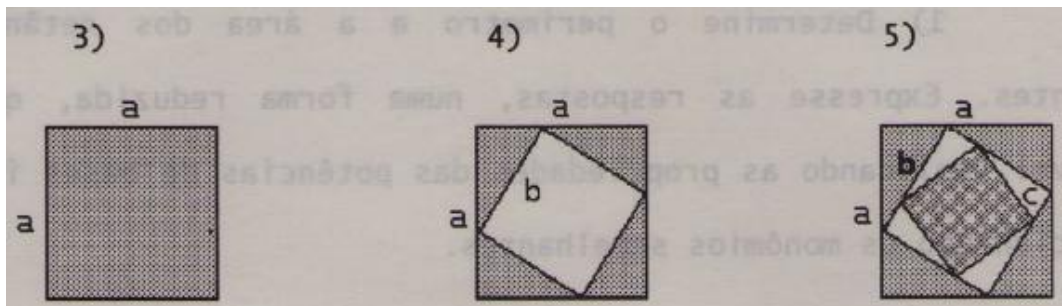
Dona Antonia é tapeceira. Ela quer fazer tapetes de forma quadrada e bordá-los com novelos de lã. Desenhou algumas composições com quadrados e hachurou algumas de suas partes, que serão bordadas.

Observando os desenhos de Dona Antonia, tente achar as áreas das partes que foram hachuradas.

1)

Tapete quadrado de dimensões 7 m x 7 m, com um outro quadrado de 5 m x 5 m, no interior.

2)

Tapete quadrado de dimensões 7 m x 7 m, com um outro quadrado de 5 m x 5 m, no interior e um terceiro quadrado de 3 m x 3 m, no interior do segundo

Se Dona Antonia, quisesse bordar outros tapetes com o mesmo padrão, mas com quadrados de tamanhos diferentes, qual seria a fórmula para encontrar as áreas de cada composição?

Para generalizar nomeie as medidas dos lados dos quadrados por a, b e c, respectivamente do maior para o menor.

Chame a atenção para o fato dos alunos poderem obter expressões algébricas para as áreas das partes hachuradas, nas quais as letras estarão representando números.

A letra a é uma variável que representa uma medida dos lados do quadrado maior, a letra b é uma variável que representa uma medida dos lados do quadrado médio e a letra c é uma variável que representa uma medida dos lados do quadrado menor.

Na figura c, obtemos uma expressão com apenas um termo:

monômio: a^2.

Na figura d, obtemos uma expressão com dois termos:

binômios: $a^2 – b^2$.

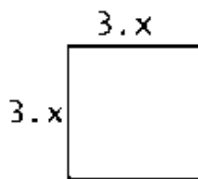
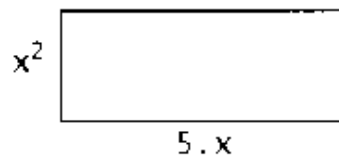
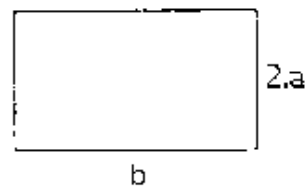
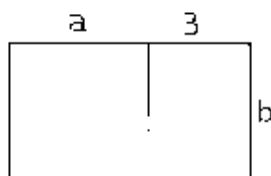
Na figura e, obtemos uma expressão com três termos:

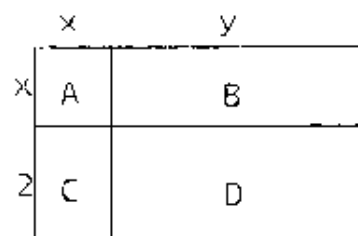
trinômio: $a^2 – b^2 + c^2$.

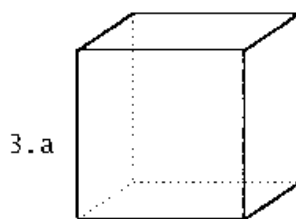
Por extensão, juntando o prefixo “poli”, que significa muitos, com o final da palavra “binômio” (que significa “dois nomes”), temos a palavra “polinômio” para representar expressões com mais de um termo.

Proponha aos alunos os exercícios seguintes e solicite que indiquem se as expressões obtidas nas respostas são monômios, binômios

ou polinômios (a unidade de medida considerada é o centímetro).

1) Determine o perímetro e a área dos retângulos seguintes. Expresse as respostas, numa forma reduzida, quando possível, aplicando as propriedades das potências de bases iguais e adicionando os monômios semelhantes.

2) Determine o polinômio que representa a área da figura.

O polinômio é a soma das áreas das partes:

3) O volume de um cubo cujas arestas medem 3 . a pode ser dado pela expressão (3 . a) . (3 . a) . (3 . a).

Como você poderia expressá-lo de uma forma reduzida?

4) O quadrado ABCD tem perímetro igual a 8 . a. Determine a área de um outro quadrado, cujos vértices são pontos médios dos lados do quadrado ABCD.

COMENTÁRIOS:

A interpretação geométrica de alguns cálculos algébricos proporciona um trabalho rico, porém há limitações, pois nem sempre conseguimos um modelo geométrico para explicá-los.

PARTE 2: CALCULANDO VALOR NUMÉRICO DE UM POLINÔMIO.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo I-22.

DESENVOLVIMENTO:

Distribua uma folha-tipo I-22 para cada aluno.

PARTE 3: POLINÔMIO COM UMA VARIÁVEL.

MATERIAL NECESSÁRIO: Nenhum.

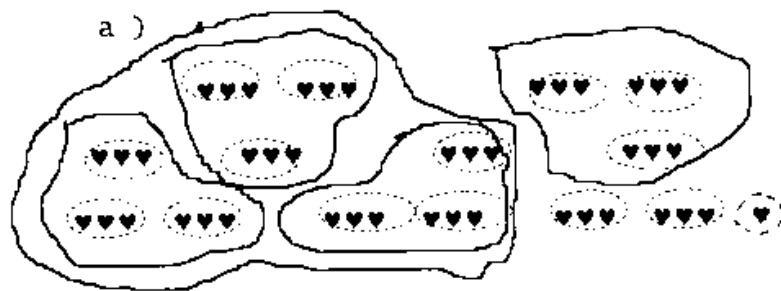
DESENVOLVIMENTO:

Peça aos alunos para gruparem e reagruparem as figuras de

acordo com a base solicitada.

Depois que os alunos realizaram os agrupamentos coloque na lousa os resultados obtidos. Algumas respostas esperadas podem ser:

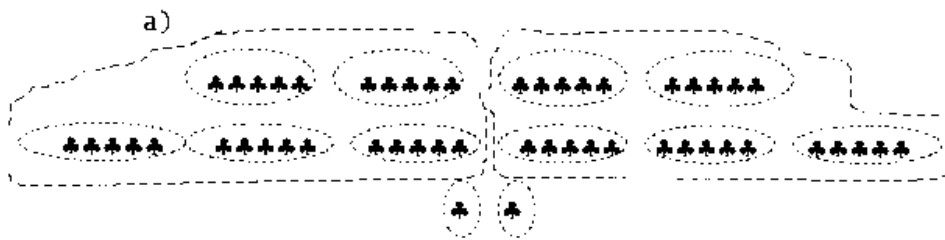
Na base 3:

b)

Grupos de 3x3x3 ou grupos 3^3	Grupos de 3x3 ou grupos de 3^2	Grupos de 3	Grupos de 1
1	1	2	1

c) 1 grupo de 3x3x3 + 1 grupo de 3x3 + 2 grupos de 3 + 1 grupo de 1.

d) (1 grupo de 3^3) + (1 grupo de 3^2) + (2 grupos de 3^1) + (1 grupo de 3^0).

e) (1×3^3) + (1×3^2) + (2×3^1) + (0×3^0).

Na base 5:

b)

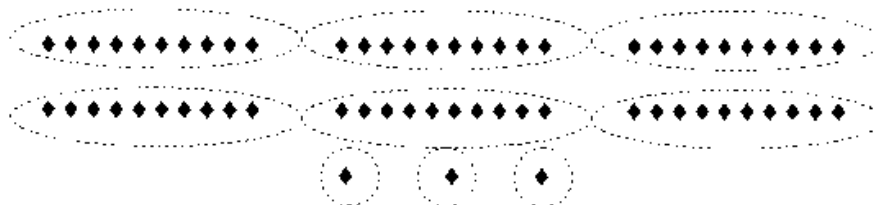
Grupos de 5x5 ou grupos de 5^2	Grupos de 5 ou grupos de 5^1	Grupos de 1
2	0	2

c) 2 grupos de 5 x 5 + 0 grupo de 5 + 2 grupos de 1.

d) (2 grupos de 5^2) + (0 grupo de 5^1) + (2 grupos de 5^0)

e) (2×5^2) + (0×5^1) + (2×5^0).

Na base 10:

a)

b)

Grupos de 10 ou grupos de 10^1	Grupos de 1
6	3

c) 6 grupos de 10 + 3 grupos de 1.

d) (6 grupos de 10^1) + (3 grupos de 10^0).

e) $6 \times 10^1 + 3 \times 10^0$

Fazendo analogia com estas bases podemos pensar numa base x qualquer em que obtemos os seguintes agrupamentos:

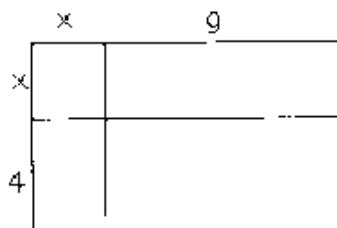
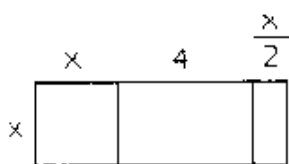
(2 grupos de x^3) + (5 grupos de x^2) + (1 grupo de x) + (3 grupos de x^0).

Usando a outra notação exponencial podemos escrever:

$$2 \; . \; x^3 + 5 \; . \; x^2 + 1 \; . \; x + 3$$

Esta expressão representa um polinômio com uma variável. Neste caso, a variável é x e dizemos que o grau do polinômio é 3, que é o maior expoente da variável.

Proponha à classe os seguintes problemas:

1) Determine os polinômios que representam áreas das seguintes figuras:

2) Complete com os algarismos que faltam:

a) 3 _ _ 5 = (3 x 10^3) + (6 x 10^2) + 4 x 10 + 5.

b) _ 0 _ 4 = (6 x 10^4) + (5 x 10^2) + 4 x 10 + 6.

c) 2 _ 4 _ _ _ = 2 x 10^5 + 3 x 10^5 + _ x _ + _ x _ + 8.

3) Qual o valor de x na equação:

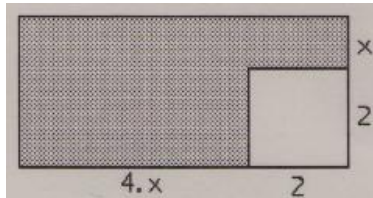
$6 \; . \; x^3 + 3 \; . \; x^2 + 2 \; . \; x + 1 = 6321$?

COMENTARIOS:

É desnecessário o trabalho com os polinômios com muitos termos e com mais de duas variáveis. Os expoentes dessas variáveis não precisam, na maioria das vezes, exceder a 3. A ênfase a ser dada é no trabalho com expressões simples, com uma ou duas variáveis que possuam expoentes 1 e 2, pois a maior parte do cálculo literal que se emprega em nível de 1º e 2º graus se reduz a expressões desse tipo.

FOLHA-TIPO I-19

Calculando o valor numérico de um polinômio.

1) Expresse por meio de um trinômio a área da parte hachurada da figura. (A figura de medida considerada é o cm).

Calcule a área da parte hachurada para:

a) x = 3 cm, substituindo x por 3 no trinômio.

b) x = 3,5 cm, substituindo x por 3,5 no trinômio.

c) x = 4 cm, substituindo x por 4 no trinômio.

No caso a) a área é igual a: ______. Dizemos que este valor é o valor numérico do polinômio que representa a área da parte hachurada para x = 3.

No caso b) a área é igual a: _____. Dizemos que este valor é o valor numérico do polinômio que representa a área da parte hachurada para x = 3,5.

No caso c) a área é igual a: _____. Dizemos que este valor é o valor numérico do polinômio que representa a área da parte hachurada para x = 4.

2) Num jogo de basquetebol, uma bola foi lançada a uma cesta e descreveu uma curva até atingir o seu alvo. A altura, em metro, em que a bola se encontra após t segundos é calculada pela expressão: altura = $30 . t – 4,9 t^2$.

A que altura a bola se encontrava após:

a) 1 segundo? b) 2 segundos? c) 3,1 segundos?

(os alunos identificarão os valores da altura com o valor numérico da expressão: $30 . t – 4,9 t^2$).

ATIVIDADE 23: OPERANDO COM POLINÔMIOS.

OBJETIVOS: Desenvolver técnicas e habilidades de cálculos com polinômios.

PARTE 1: ADICIONANDO E SUBTRAINDO POLINÔMIOS.

MATERIAL NECESSÁRIO: Nenhum.

DESENVOLVIMENTO:

Peça para os alunos calcularem a soma: de 3442 com 485. É possível que utilizem o seguinte algoritmo:

$$\begin{array}{r} 3442 \\ +\quad 485 \\ \hline 3927 \end{array}$$

Diga-lhes que esta disposição organiza e possibilita que somemos grupos, ao invés de contar todas as unidades.

Ressaltando o valor posicional de cada algarismo nos números: 3442 e 485, diga-lhes que na soma de 3442 com 485, queremos juntar 3 grupos de 1000, 4 grupos de 100, 4 grupos de 10 e 2 unidades com 4 grupos de 100, 8 grupos de 10 e 5 unidades.

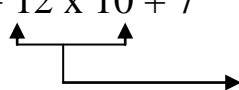
Substituindo as expressões:

grupos de 1000 por M (de milhar),

grupos de 100 por C (de centenas) e

grupos de 10 por D (de dezenas),

podemos decompor os números e escrever o algoritmo da seguinte forma:

$$
\begin{array}{r}
3\,M + 4\,C + 4\,D + 2 \\
+ \qquad 4\,C + 8\,D + 5 \\
\hline
3\,M + 8\,C + 12d + 7
\end{array}
$$

ou ainda, usando potências de 10, temos:

$$
\begin{array}{r}
3 \times 1000 + 4 \times 100 + 4 \times 10 + 2 \\
+ \qquad 4 \times 100 + 8 \times 10 + 5 \\
\hline
3 \times 1000 + 8 \times 100 + 12 \times 10 + 7
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
3 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 4 \times 10 + 2 \\
+ \qquad 4 \times 10^2 + 8 \times 10 + 5 \\
\hline
3 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 12 \times 10 + 7
\end{array}
$$

Como estamos trabalhando na base 10, nesta base não existe algarismo “12”. Reagrupamos os 12 grupos de dezenas em 1 centena e 2 dezenas.

$$
\begin{array}{r}
3 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 4 \times 10 + 2 \\
+ \qquad 4 \times 10^2 + 8 \times 10 + 5 \\
\hline
3 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 12 \times 10 + 7
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
12 \times 10 &= (10 + 2) \times 10 = \\
&= 10 \times 10 + 2 \times 10 = \\
&= 1 \times 10^2 + 2 \times 10
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& 3 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 12 \times 10 + 7 = \\
& = 3 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + (1 \times 10^2 + 2 \times 10) + 7 = \\
& = 3 \times 10^3 + (8 \times 10^2 + 1 \times 10^2) + 2 \times 10 + 7 = \\
& = 3 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 2 \times 10 + 7.
\end{aligned}
$$

Este dispositivo pode ser usado para adicionar dois polinômios, agrupando os termos semelhantes (aqueles que têm o mesmo grau e variável) e efetuando a soma algébrica destes termos.

Por exemplo, calcular:

$$(3 . x^3 + 4 . x^2 – 2 . x + 1) + (5 . x^3 + 8 . x^2 – 5 . x – 8)$$

$$\begin{array}{rl} & 3 . x^3 + 4 . x^2 – 2 . x - 1 \\ + & 5 . x^3 + 8 . x^2 + 5 . x - 8 \\ \hline & 8 . x^3 + 12 . x^2 + 3 . x – 7 \end{array}$$

Observe que com os polinômios, não há necessidade de reagrupar os coeficientes diferentes de 0, 1, 2, 3, ..., 9, porque não se trata de uma escrita decimal.

Quanto à subtração, diga-lhes que a trataremos como a operação inversa da adição e assim, para calcular a diferença entre dois polinômios, como por exemplo:

$$(15 . x^2 – 3 . x + 1) – (2 . x^2 + 3 . x – 8),$$

Somamos o polinômio $15 . x^2 – 3 . x + 1$ ao oposto do polinômio $2 . x^2 + 3 . x – 8$.

$$(15 . x^2 – 3 . x + 1) – (2 . x^2 + 3 . x – 8) =$$

$$= (15 . x^2 – 3 . x + 1) + (- 2 . x^2 – 3 . x + 8).$$

Usando o dispositivo, temos:

$$\begin{array}{l} 15 . x^2 – 3 . x + 1 \\ - 2 . x^2 – 3 . x + 8 \\ \hline 13 . x^2 – 6 . x + 9 \end{array}$$

Proponha aos alunos outros exercícios envolvendo adição e subtração de polinômios.

COMENTÁRIOS:

Um dos objetivos do estudo de polinômios é levar os alunos a tratarem de forma generalizada as operações e propriedades dos números já

estudadas. Desta forma procuraremos fazer uma analogia com os algoritmos conhecidos das operações elementares, numa tentativa de tornar as operações com polinômios mais compreensivas.

PARTE 2: MULTIPLICANDO POLINÔMIOS.

MATERIAL NECESSÁRIO: Nenhum.

DESENVOLVIMENTO:

Solicite aos alunos que calculem os produtos de 8 e 12 e de 11 e 14, de várias maneiras diferentes, incluindo os recursos de cálculo mental.

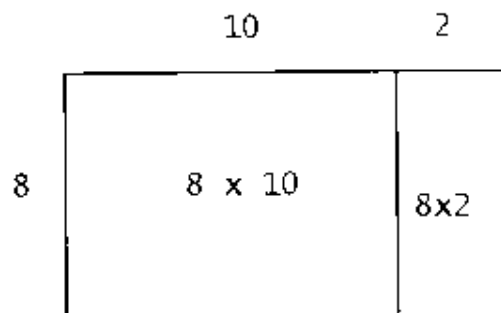
Após um tempo para os cálculos, destaque na lousa alguns dos procedimentos que surgiram.

Explique que o algoritmo da multiplicação, mais utilizado por eles, esta baseado na propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. No caso da multiplicação de 8 por 12, se decompomos 12 na soma (10 + 2), temos:

$$8 \times 12 = 8 \times (10 + 2) = 8 \times 10 + 8 \times 2 = 80 + 16 = 96$$

Algoritmo.

```
 10 + 2
    × 8
 ------
     16
   + 80
 ------
     96
```

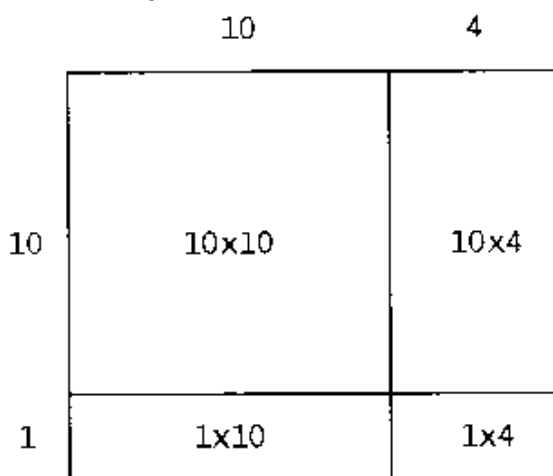
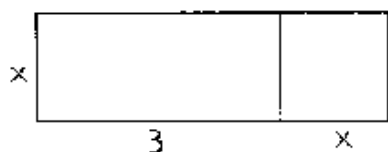
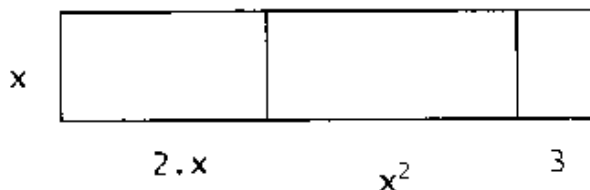
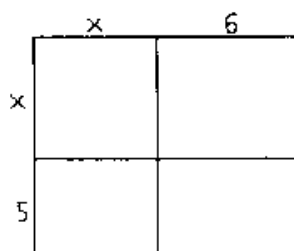
Uma representação geométrica.

Na multiplicação de 11 por 14, se decompomos 11 em (10 + 1) e 14 em (10 + 4), aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, temos:

$$11 \times 14 = (10 + 1) \times (10 + 4) =$$
$$= 10 \times 10 + 10 \times 4 + 1 \times 10 + 1 \times 4 =$$
$$= 100 + 40 + 10 + 4 =$$
$$= 154$$

Algoritmo

```
   10 + 1
   10 + 4
  --------
        4
       40
 +     10
      100
  --------
      154
```

Uma representação geométrica

	10	4
10	10x10	10x4
1	1x10	1x4

Proponha a extensão desse procedimento para o cálculo algébrico, nas situações seguintes:

Faça um painel para a apresentação dos diferentes algoritmos para multiplicar os binômios (x + 5) e (x + 6), que surgiram na classe.

Peça que escolham um deles, por exemplo:

$$
\begin{array}{l}
x + 5 \\
\underline{x + 6 \qquad\quad} \\
x^2 + 5 \cdot x \\
\qquad\ \ \underline{6 \cdot x + 30} \\
x^2 + 11 \cdot x + 30
\end{array}
$$

e estendam esse procedimento para obter o produto do trinômio ($x^2 - 3 \cdot x + 1$) pelo binômio (x + 1).

$$
\begin{array}{l}
x^2 - 3 \cdot x + 1 \\
\underline{x + 4 \qquad\qquad}
\end{array}
$$

Proponha outros exercícios envolvendo multiplicações de polinômios.

PARTE 3: DIVIDINDO POLINÔMIOS.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo I-20.

DESENVOLVIMENTO:

Distribua uma folha-tipo I-20 para cada aluno. Após a realização desta tarefa, proponha outros exercícios envolvendo divisões de polinômios.

PARTE 4: PROPRIEDADES DA DIVISÃO DE POLINÔMIOS.

MATERIAL NECESSÁRIO: Nenhum.

DESENVOLVIMENTO:

Informe que na divisão de polinômios valem as mesmas propriedades das divisões com os números.

Quando a divisão é exata, Isto é, o resto é zero, multiplicando o polinômio quociente pelo polinômio divisor temos o polinômio dividendo.

(polinômio quociente) x (polinômio divisor) = (polinômio dividendo)

Quando a divisão não é exata, multiplicando o polinômio quociente pelo polinômio divisor e somando com o resto temos o polinômio dividendo.

(polinômio quociente) x (polinômio divisor) + (Polinômio resto) = (Polinômio dividendo)

Proponha os seguintes exercícios:

1) Efetue as divisões dos polinômios e confira seu resultado, aplicando as propriedades:

(polinômio quociente) x (polinômio divisor) = (polinômio dividendo)

ou

(polinômio quociente) x (polinômio divisor) + (Polinômio resto) = (Polinômio dividendo)

a) $x^3 + 2 . x^2 – 8 . x + 35$ por $x + 5$
b) $x^3 – 64$ por $x - 4$

Lembre que, neste caso, o polinômio ($x^3 – 64$) não tem os termos em x^2 e nem em x e escrever esses termos com coeficiente zero, pode ajudá-lo na divisão de polinômios:

$$x^3 - 4 = x^3 + 0 . x^2 + 0 . x – 64.$$

2) Verifique se as divisões estão corretas, aplicando as propriedades da divisão:

a) $3 . x^2 + 11 . x + 10$ | $x + 2$

0 | $3 . x + 5$

c) $2 . x^3 + x^2 – 3 . x – 2$ | $x^2 – 3 . x + 1$

$68 . x – 29$ | $2 . x + 2$

3) Dividindo o polinômio A pelo polinômio ($y – 3$), a divisão dá exata e o quociente é igual a ($y^2 + 2 . y + 6$). Determine o polinômio A.

FOLHA-TIPO I-20

Dividindo polinômios.

Lembrando que o algoritmo da divisão se baseia em subtrações sucessivas, analisem os diferentes algoritmos e escrevam, etapa por etapa, como funciona cada algoritmo.

```
   1 8 4 2     | 1 2
 - 1 2 0 0       1 5 3
     6 4 2       C D U
   - 6 0 0
       4 2
     - 3 6
         6
```

```
1 8 4 2 | 1 2        1 8 4 2 | 1 2         1 8 4 2 | 1 2
  6 4     1 5 3    - 1 2       1 5 3     - 1 2 0 0   1 5 3
    4 2   C D U        6 4     C D U         6 4 2   C D U
      6              - 6 0                 - 6 0 0
                         4 2                   4 2
                       - 3 6                 - 3 6
                           6                     6
```

Interpretando a adição e a subtração como somas algébricas, podemos obter outros algoritmos da divisão.

a) Escrevendo o dividendo, o divisor, o quociente e resto na forma decomposta.

```
1000 + 800 + 40 + 2      | 10 + 2
1000  - 200                 100 + 60 – 8 + 1 =  153
        600 + 40
      - 600 – 120
             - 80 + 2
             + 80 + 16
                    18   =  10 + 8
                          - 10 – 2
                                6
```

FOLHA-TIPO I-20a

Tente explicitar como os termos do quociente e os restos são obtidos. Por exemplo, como foi obtido o primeiro termo do quociente (100)? E o primeiro resto (600)?

O que significa – 100 – 200, no resto?

b) Escrevendo os termos da divisão na forma decomposta, usando a notação de potências.

$$\begin{array}{l|l}
1 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 4 \times 10 + 2 & 10 + 2 \\ \hline
- 1 \times 10^3 - 2 \times 10^2 & 1 \times 10^2 + 6 \times 10 - 8 + 1 = 10^2 + 6 \times 10 - 7 \\
\quad 6 \times 10^2 + 4 \times 10 & \\
\quad - 6 \times 10^2 - 12 \times 10 & \\
\qquad - 8 \times 10 + 2 & \\
\qquad + 8 \times 10 + 16 & \\
\qquad\qquad 18 = 10 + 8 & \\
\qquad\qquad - 10 - 2 & \\
\qquad\qquad\quad 6 &
\end{array}$$

Tente escrever passagem por passagem, como se obteve o quociente ($10^2 + 6 . 10 - 7$) na divisão de ($1 . 10^3 + 8 . 10^2 + 4 . 10 + 2$) por ($10 + 2$).

Podemos estender este último algoritmo à divisão de polinômios.

$$\begin{array}{l|l}
x^3 + 2 . x^2 - 5 . x + 4 & x - 6 \\ \hline
- x^3 + 6 . x^2 & x^2 + 8 . x + 43 \\
\quad 8 . x^2 - 5 . x & \\
\quad - 8 . x^2 + 48 . x & \\
\qquad 43 . x + 4 & \\
\qquad - 43 . x + 258 & \\
\qquad\qquad 262 &
\end{array}$$

Tente escrever, passagem por passagem, como se obteve o quociente ($x^2 + 8 . x + 43$) na divisão de ($x^3 + 2 . x^2 - 5 . x + 4$) por ($x - 6$).

ATIVIDADE 24: UM TRIÂNGULO, SUAS MEDIDAS E ALTURAS.

OBJETIVOS: Inferir propriedades das medianas e alturas dos triângulos, bem como fazer algumas demonstrações.

PARTE 1: MEDINDO MEDIANAS.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo I-24.
Régua, compasso e transferidor.

DESENVOLVIMENTO:

Forneça a cada aluno uma folha-tipo I-24.

Solicite a eles que desenhem na folha mais um triângulo, a sua escolha e chamem-no de A*B*C* (V).

A seguir, os alunos determinarão os pontos médios dos lados dos triângulos, com régua e compasso (“é proibido” medir!), para traçar as medianas.

Combine com a classe em chamar de:

m_1 - mediana relativa ao lado AB (A’B’, A’’B’’, ...)

m_2 - mediana relativa ao lado BC (B’C’, B’’C’’, ...)

m_3 - mediana relativa ao lado AC (A’C’, A’’C’’, ...)

Observando as construções dos colegas, poderão perceber que as medianas de um triângulo se encontram num único ponto e que ele está na região interno de triângulo. Aliás, essas observações já devem ter sido feitas na Atividade 19 (Triângulos e Alguns Pontos Notáveis).

A seguir peça aos alunos que identifiquem cada triângulo, segundo a medida de seus lados e de seus ângulos (agora é permitido medir!).

Solicite a eles que meçam também as medianas e organizem essas medidas numa tabela do tipo:

	TIPO DE TRIÂNGULO		MEDIDAS DAS MEDIANAS		
TRIÂNGULOS	quanto aos lados	quanto aos ângulos	m_1	m_2	m_3
I					
II					
III					
IV					
V					

Ao analisarem a tabela, os alunos poderão observar:

- No triângulo eqüilátero, todas as medianas têm a mesma medida.

- No triângulo isósceles não eqüilátero, apenas duas medianas têm a mesma medida.

- O triângulo escaleno apresenta as medianas de medidas diferentes.

Em seguida sugira aos alunos que meçam os ângulos que as medianas formam com os lados que encontram, em cada triângulo. Uma análise das medidas obtidas, poderá levar os alunos a perceber que:

- Nos triângulos eqüilátero, todas as medianas são perpendiculares aos lados nos quais incidem.

- Nos triângulos isósceles (não eqüiláteros) só uma mediana é perpendicular ao lado no qual incide. É aquela relativa à “base” (nestes triângulos, chamaremos de “base” o lado de medida diferente dos outros dois).

- Nos triângulos escalenos as medianas não são perpendiculares aos lados nos quais incidem.

PARTE 2: COMO PROVAR?

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo II-24.

DESENVOLVIMENTO:

Distribua para cada aluno uma folha-tipo II-24 e explique a eles que o triângulo ABC é eqüilátero e em cada figura ele aparece com uma de suas medianas.

Solicite a eles que respondam e justifiquem as seguintes questões, que poderão ser colocadas na lousa:

1. em I, II e III, cada mediana divide o triângulo ABC em dois outros, um branco e outro sombreado.

2. Que relação existe entre os triângulos sombreados de I, II e III? Por quê?

E entre os triângulos brancos de I, II e III? Por quê?

3. Levando em consideração as respostas anteriores, o que se pode afirmar a respeito de m_1, m_2 e m_3 ? Por quê?

O caso de congruência a ser utilizado para responder a questão 2 é LLL, uma vez que ainda não foi provado que as medianas de um triângulo eqüilátero são perpendiculares aos lados sobre os quais incidem e assim não poderão utilizar o caso LAL.

Sugira aos alunos que comparem essa conclusão com a que havia tirado na Parte 1, bem como, quais as diferenças nos dois procedimentos utilizados para chegarem a essa conclusão.

Dando prosseguimento à esta atividade, convide os alunos a construírem um triângulo isósceles e a mediana relativa à base, para discutirem a questão:

Essa mediana divide o triângulo inicial em dois outros. Justifique o fato desses dois triângulos serem congruentes.

Finalmente, a partir da congruência de cada par de triângulos da folha II-24, em cada caso, os alunos serão solicitados a argumentar o seguinte fato:

Num triângulo eqüilátero, cada mediana é perpendicular ao lado sobre o qual incide.

De fato, a partir da congruência dos triângulos AMC e BMC, eles poderão concluir que $\alpha = \beta$. Como $\alpha + \beta = 180^o$, então $\alpha = \beta = 90^o$ e, portanto, $m_1 \perp AB$. O mesmo ocorre com m_2 e m_3 .

E um triângulo isósceles, as medianas são perpendiculares aos lados sobre os quais incidem?

Após terem discutido o fato das medianas de um triângulo eqüilátero dividi-lo em dois triângulos retângulos, aproveite para colocar em discussão o fato das alturas coincidirem com as medianas, nesse tipo de triângulo.

Os alunos poderão perceber que essa coincidência não ocorre nos triângulos isósceles (não eqüiláteros) e nos escalenos. Para tanto, solicite a eles que construam um triângulo de cada tipo, suas medianas em vermelho e alturas em azul, verificando assim que, em geral, não há coincidência.

Caso este tipo de trabalho ainda não esteja ao alcance da maioria de seus alunos (demonstrações), é possível propor a eles que verifiquem esses resultados por meio de construções, medições, recortes e utilizem-nos sempre que necessário. Se for o caso, proponha esta atividade mais tarde, quando perceber que seus alunos têm condições de elaborar a argumentação contida nesta atividade.

COMENTÁRIOS:

Convém discutir com os alunos que o processo de medição permite que se conclua a propriedade para aquele triângulo medido, nada nos garantindo que ela valha para todos os triângulos, mesmo que façamos medidas em milhão de triângulos (sempre haverá mais um que não medimos e para o qual não podemos concluir se vale ou não a propriedade).

Por outro lado, o processo utilizado nessa atividade, prescinde de medições. Basta argumentar sobre duas premissas, que são consideradas, a priori, verdadeiras:

Triângulo ABC é eqüilátero

m_1, m_2, m_3 são medianas

Utilizando propriedades já conhecidas, juntamente com essas duas premissas, conclui-se que é válida a propriedade em questão (ou as propriedades em questão) :

Num triângulo eqüilátero, as medianas são congruentes entre si e coincidem com as alturas desse triângulo.

PARTE 3: RETOMANDO UMA PROPRIEDADE DE MEDIANA.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo III-24.

DESENVOLVIMENTO:

Distribua uma folha-tipo III-24, informando-os que os segmentos AB, CD, EF, GH são lados de quatro triângulos diferentes, respectivamente.

Peça a eles que desenhem os outros 3 triângulos, chamando-os de JCD, KEF, LGH, sendo que:

a) Todos devem ter a mesma altura do triângulo IAB, relativa aos lados AB, CD, EF e GH, respectivamente.
b) JCD é retângulo em C, KEF é escaleno e LGH é eqüilátero.

Dê um tempo para que executem o trabalho pedido e solicite que comparem as respostas com as dos colegas. Nessa comparação os alunos poderão perceber que:

- A solução de (II) é única. Os triângulos construídos são congruentes.

- A solução de (III) não é única. Os triângulos desenhados podem não serem congruentes.

- O caso (IV) não têm solução. Nesse caso, basta construir o triângulo eqüilátero de lado GH e a altura relativa a GH, que não é igual à altura do triângulo IAD.

Duas questões podem ser colocadas a seguir:

1. Dos três triângulos construídos qual deles tem menor perímetro?

2. O que se pode prever sobre as áreas dos triângulos (I), (II), (III) ?

Por quê?

Determinar as áreas desses triângulos.

Confirmar (ou não) a previsão feita.

A seguir, proponha aos alunos que construam as medianas dos três triângulos, relativas aos lados AB, CD e EF, questionando-os sobre:

1. Quantos triângulos obteve?
2. O que eles têm em comum quanto aos lados?

E quanto às alturas?

3. Calcule às áreas desses seis triângulos, compare-os com as áreas dos triângulos iniciais.

O que observa?

COMENTÁRIOS:

Esta atividade é uma retomada da Atividade 19 (Triângulos e Alguns Pontos Notáveis), com outra abordagem, na qual aproveitamos trabalhar uma propriedade dos triângulos:

TRIÂNGULO QUE TÊM UM LADO CONGRUENTE
E MESMA ALTURA RELATIVA A ESSE LADO,
TÊM MESMA ÁREA.

Outro objetivo que pode se alcançado com esta atividade é fazer com que os alunos percebam que:

- Triângulos com mesma área podem não ter mesmo perímetro.
- Triângulos com mesma área não são necessariamente congruentes.
- Entre os triângulos de mesma base e mesma altura relativa a essa base o que tem menor perímetro é o isósceles.

PARTE 4: O TRIÂNGULO EQÜILÁTERO E SUAS ALTURAS.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo IV-24.

DESENVOLVIMENTO:

Distribua para cada aluno uma folha-tipo IV-24.

Informe a eles que o triângulo ABC é eqüilátero e, em cada figura, ele aparece com uma de suas alturas h_1, h_2 e h_3.

Coloque as seguintes questões para serem debatidas:

1. Em cada caso, qual a relação entre o triângulo branco e o sombreado? Por quê?

2. Os seis triângulos são congruentes entre si? Por quê?

3. O que se pode concluir a respeito das medidas de h_1, h_2 e h_3?

4. O que se pode afirmar com certeza a respeito dos ângulos internos dos seis triângulos? Por quê?

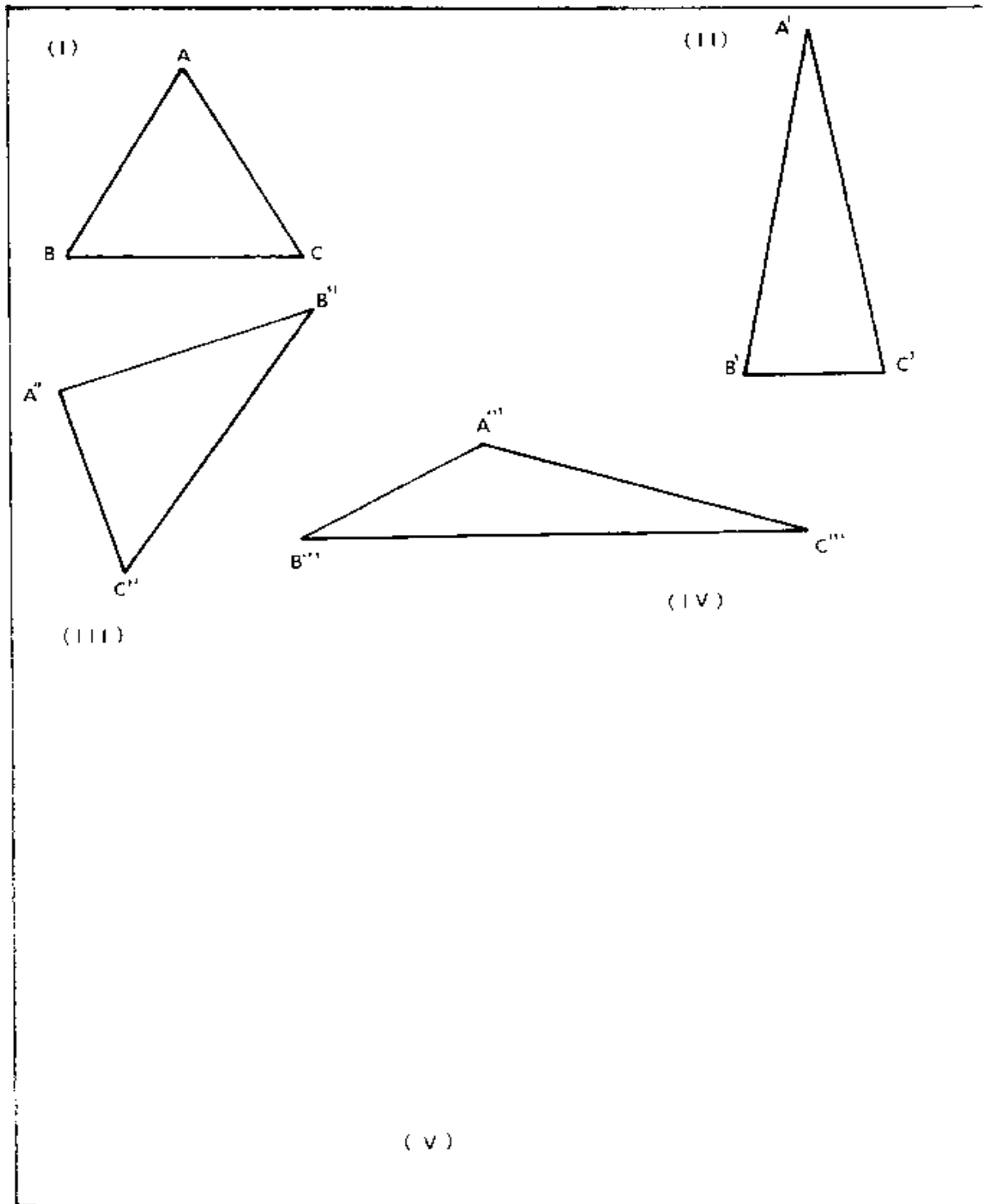
A seguir, peça aos alunos que construam as bissetrizes do triângulo ABC, em cada caso.

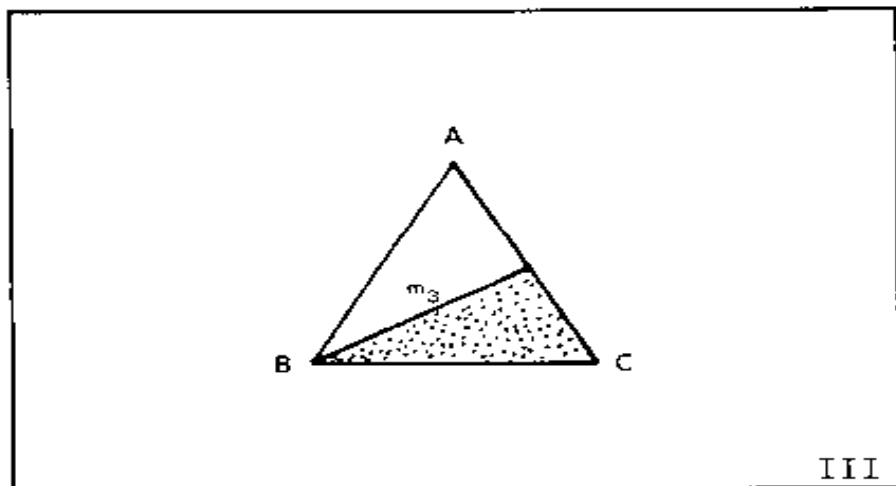
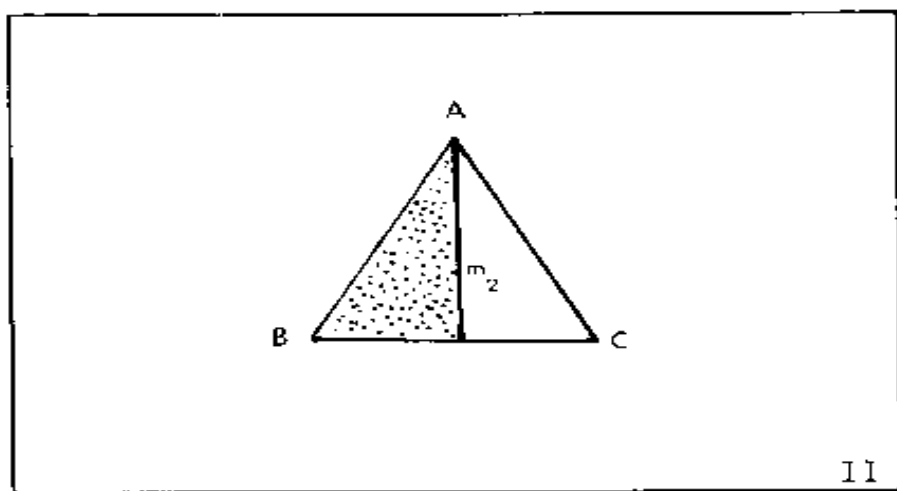
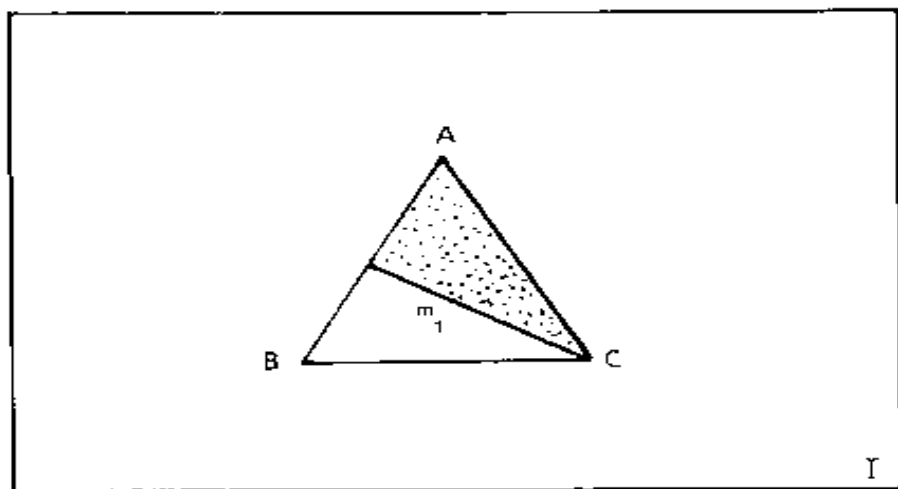
Os alunos observarão que elas coincidem com as alturas.

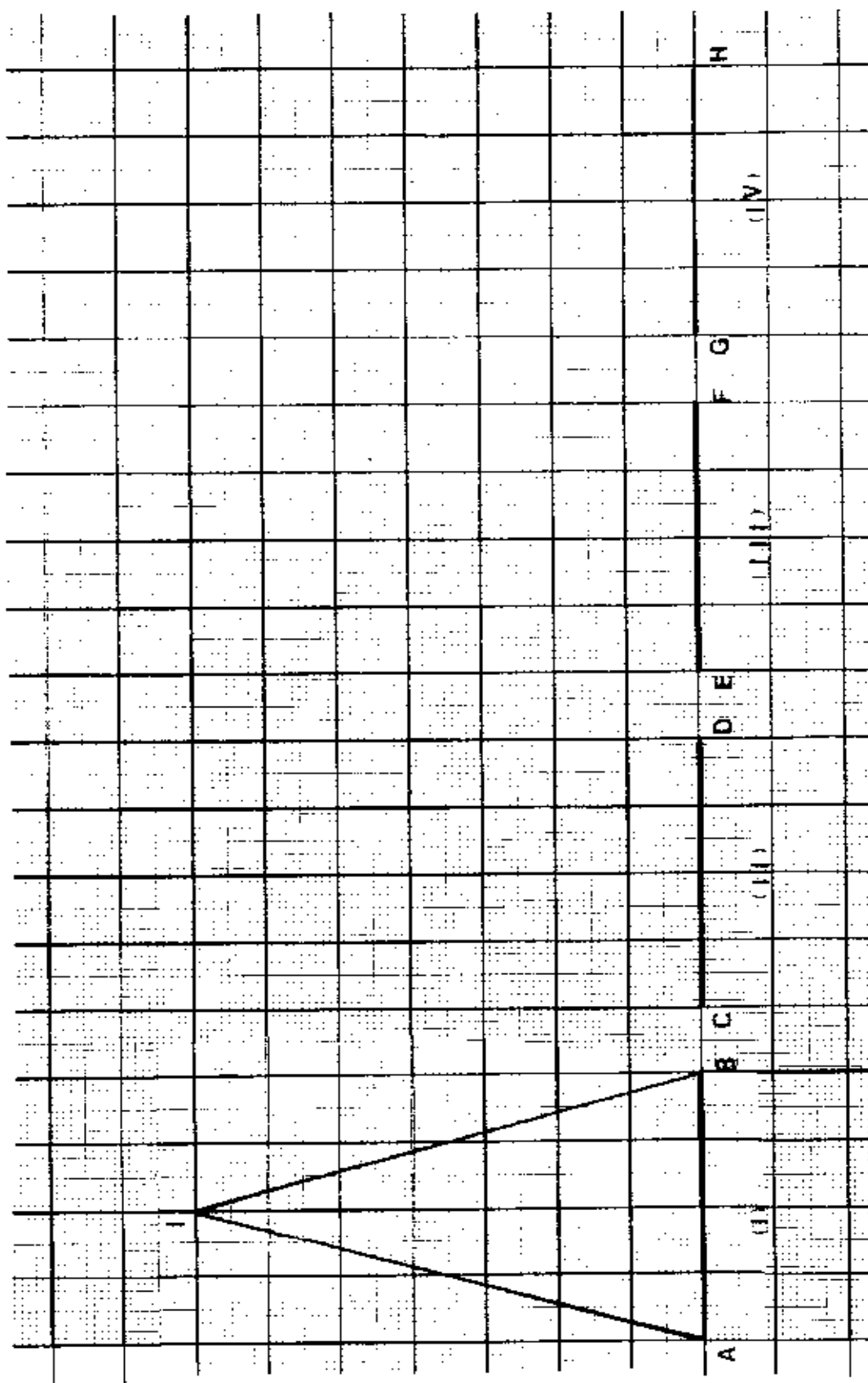
Essa propriedade é válida para os triângulos isósceles? E para os escalenos?

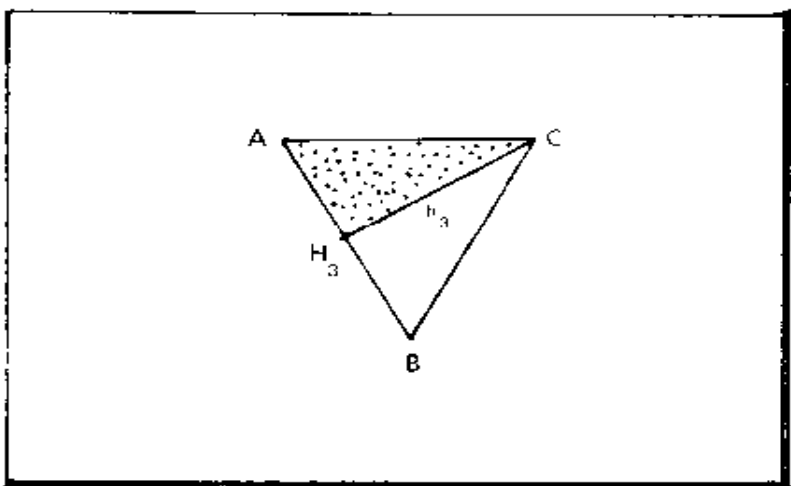
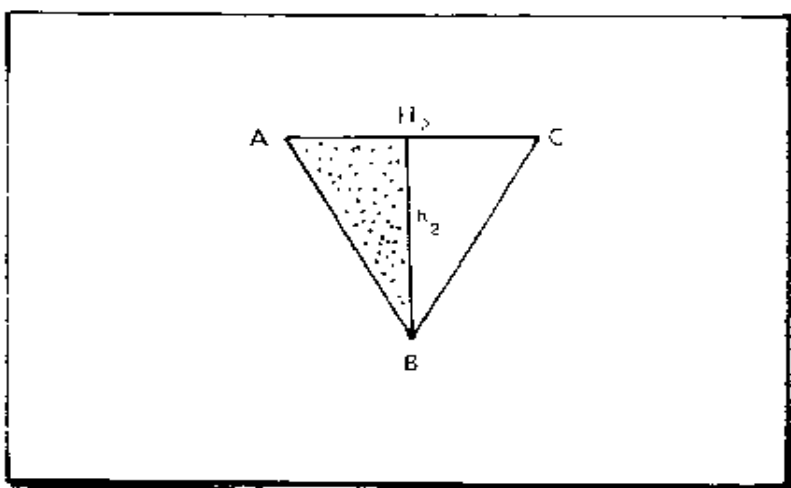
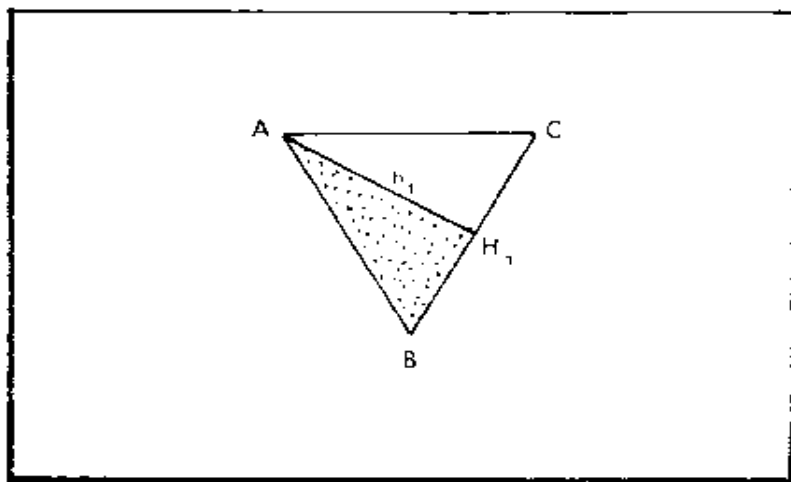
FOLHA-TIPO I-24

Medindo medianas.

Construa um triângulo A*B*C*, à sua escolha e as medianas dos cinco triângulos.

FOLHA-TIPO II-24

Como provar?

FOLHA-TIPO III-24

Retomando uma propriedade da mediana.

FOLHA-TIPO IV-24

O triângulo eqüilátero e suas alturas.

ATIVIDADE 25: MEDIATRIZES, BISSETRIZES E ALGUNS PROBLEMAS.

OBJETIVOS: Inferir propriedades das mediatrizes e bissetrizes dos triângulos, bem como aplicá-las na resolução de problemas.

PARTE 1: PONTOS MÉDIOS TAMBÉM SÃO IMPORTANTES.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo I-25.
Régua, compasso, esquadros.

DESENVOLVIMENTO:

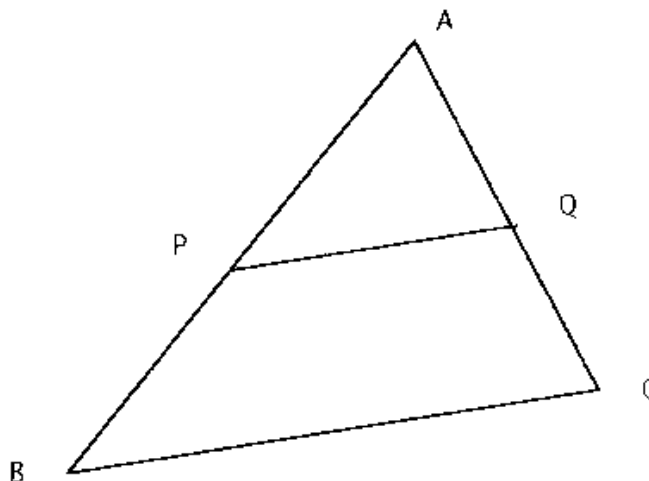
Distribua uma folha-tipo I-25 para cada aluno.

Dê um tempo para que os alunos executem o trabalho solicitado e, a seguir, discuta com eles o que observam na tabela preenchida. A intenção é fazer com que os alunos percebam que:

O SEGMENTO CUJAS EXTREMIDADES SÃO PONTOS MÉDIOS DE LADOS DE UM TRIÂNGULO É PARALELO AO TERCEIRO LADO E MEDE A METADE DO TERCEIRO LADO.

Ao construírem as alturas relativas ao terceiro lado (BC), os alunos perceberão que os dois segmentos determinados por PQ sobre elas, apresentam medidas iguais. Em outras palavras, a razão entre cada segmento determinado por PQ sobre a altura e a própria altura é $\frac{1}{2}$.

Será que essa razão também se mantém para as áreas dos triângulos ABC e APQ?

Dispondo das informações anteriores, os alunos poderão calcular as áreas desses triângulos e concluir que:

PARTE 2: AS MEDIATRIZES DE UM TRIÂNGULO RETÂNGULO.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo II-25.

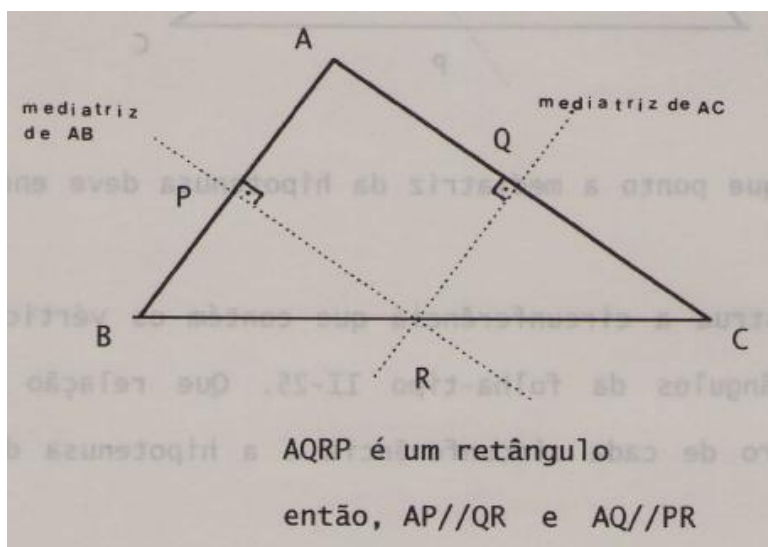
DESENVOLVIMENTO:

Distribua para cada aluno uma folha-tipo II-25 e dê um tempo para que efetuem as construções pedidas. Uma vez terminado esse trabalho, encaminhe uma discussão a partir de observações sobre as mediatrizes e pontos obtidos; algumas questões poderão ser encaminhadas, tais como:

- Que relação existe entre as mediatrizes dos catetos e os próprios catetos?

Além delas serem perpendiculares aos próprios catetos no

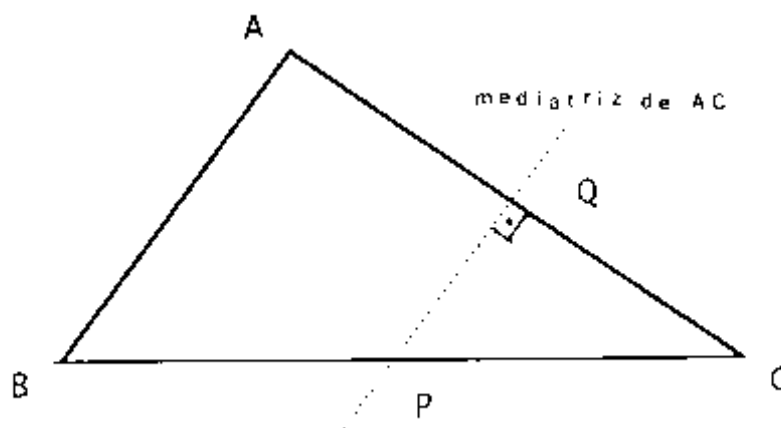
ponto médio (pela própria definição de mediatriz), os alunos poderão chegar a conclusão de que elas são paralelas aos catetos, isto é, <u>a mediatriz de um cateto é paralela ao outro cateto</u>.

A verificação desse fato poderá ser feita por meio de medições dos ângulos envolvidos na figura (são todos retos e, portanto, obtém-se um retângulo), ou por meio de uma argumentação sobre os ângulos envolvidos na construção (as mediatrizes dos catetos são perpendiculares aos mesmo e, portanto, obtém-se um quadrilátero com três ângulos retos. Conseqüentemente, o quarto ângulo também é reto e o quadrilátero é um retângulo).

Observação: Se o símbolo // não foi trabalhado com os alunos, aproveite para introduzi-lo neste momento, caso facilite a comunicação.

Em que ponto as mediatrizes dos catetos se encontram?

Também neste caso é possível que os alunos constatem, apenas com o desenho, que a intersecção das mediatrizes dos catetos é o ponto médio da hipotenusa.

Entretanto, uma argumentação mais rigorosa, pode estar baseada nos resultados estudados na atividade anterior (PONTOS MÉDIOS TAMBÉM SÃO IMPORTANTES). Como Q é o ponto médio do cateto AC

e QR é paralelo ao cateto AB, então QR passa pelo ponto médio da hipotenusa BC, isto é, no ponto R; fazendo o mesmo raciocínio com PR, conclui-se que as mediatrizes QR e PR passam pelo ponto médio da hipotenusa do triângulo ABC.

Em que ponto a mediatriz da hipotenusa deve encontrá-la?

Construa a circunferência que contém os vértices dos triângulos retângulos da folha-tipo II-25. Que relação existe entre o diâmetro de cada circunferência e a hipotenusa de cada triângulo?

A partir dessa última questão, os alunos poderão inferir que sempre é possível inscrever um triângulo retângulo numa semi-circunferência.

PARTE 3: BISSETRIZES E SEUS PROBLEMAS.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo III-25.

DESENVOLVIMENTO:

Distribua uma folha-tipo III-25 para cada aluno e solicite a eles que discutam e resolvam os problemas em pequenos grupos.

Uma vez executado o trabalho, socialize com a classe as resoluções apresentadas para cada questão.

Ao final, faça com eles um levantamento dos conceitos e propriedades que utilizaram para resolver os problemas. É possível que surjam itens do tipo:

- O que é bissetriz de um ângulo interno de um triângulo?

- Quanto vale a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo?

- Como duplicar um ângulo com régua e compasso?

- Ângulos formados por paralelas cortadas por transversal e suas propriedades.

- O que é triângulo isósceles?

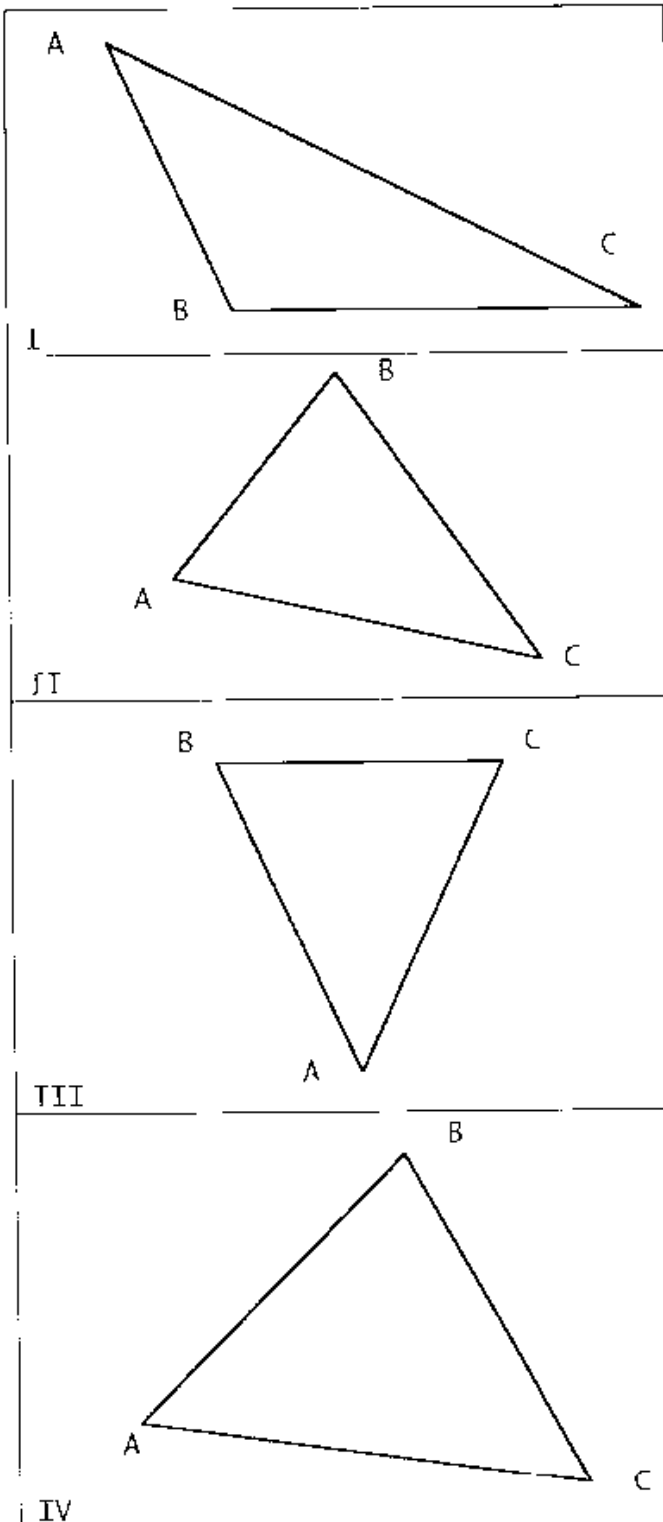
- Num triângulo eqüilátero as alturas coincidem com as bissetrizes?

- Ângulo oposto pelo vértice são congruentes?

Como todos esses conceitos e propriedades, foram trabalhadas anteriormente, esse é um momento propício para retomá-los, aprofundá-los ou mesmo dirimir dúvidas que porventura ainda possam existir.

FOLHA-TIPO I-25

Pontos médios também são importantes.

a) Determine os pontos médios de AB e AC em cada caso. Chame-os por P e Q respectivamente.

b) Represente os segmentos PQ em cada caso.

c) Verifique, com auxílio de esquadros, se BC // PQ.

d) Organize na tabela as medidas de BC e PQ.

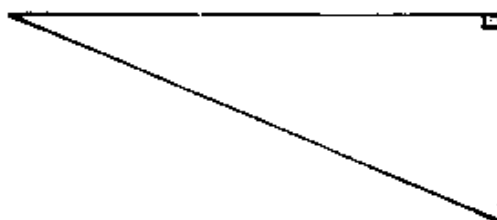
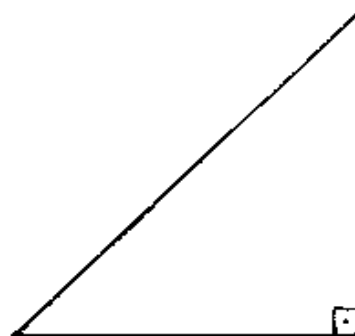
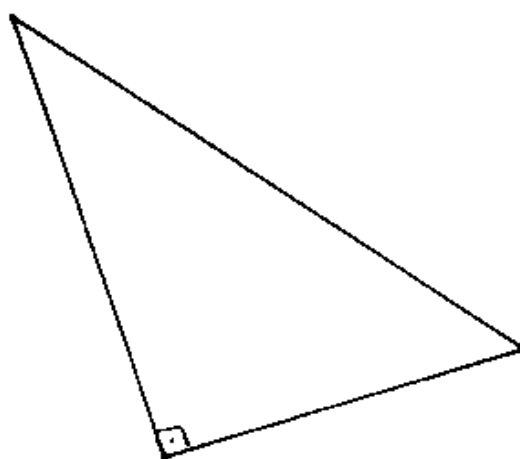
caso	BC	PQ
I		
II		
III		
IV		

e) Trace a altura relativa a BC em cada caso.

Observe as medidas dos segmentos determinados por PQ sobre as alturas.

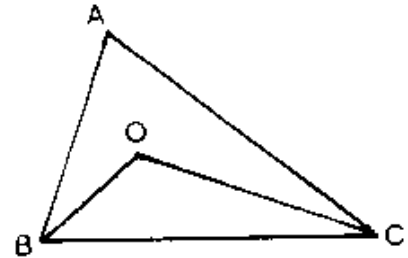
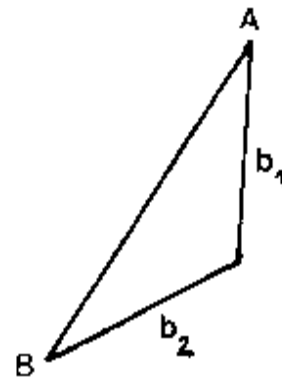
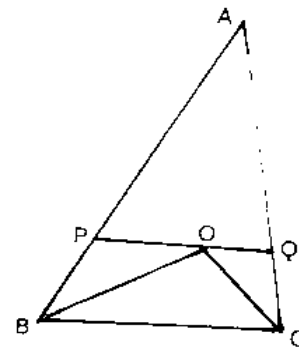
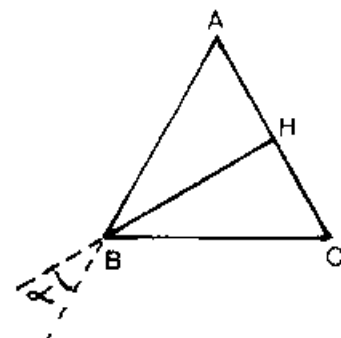
FOLHA-TIPO II-25

As mediatrizes de um triângulo retângulo.

Construa as mediatrizes dos catetos desses triângulos retângulos.

FOLHA-TIPO III-25

Bissetrizes e seus problemas.

Resolva os problemas:

1. Na figura, BO e CO são bissetrizes dos ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$, respectivamente. Qual é a medida de Â?

2. Vamos construir o triângulo ABC? Um de seus lados é AB e b_1 e b_2 são bissetrizes de A e B.

3. No triângulo ABC, os segmentos BO e CO são bissetrizes de B e C, respectivamente. O segmento PQ é paralelo ao segmento BC. Justifique o fato de que os triângulos BPO e CQO são isósceles.

4. O triângulo ABC é eqüilátero. BH é altura relativa ao lado AC. Quanto mede o ângulo α?

ATIVIDADE 26: CONHECENDO SISTEMAS DE DUAS EQUAÇÕES DO 1º GRAU COM DUAS INCÓGNITAS.

OBJETIVOS: Equacionar um problema utilizando duas variáveis por meio de um sistema de equações.
Resolver graficamente um sistema de equações do 1º grau e interpretar o significado da solução gráfica.

PARTE 1: INTRODUZINDO SISTEMA DE DUAS EQUAÇÕES DO 1º GRAU COM DUAS INCÓGNITAS.

MATERIAL NECESSÁRIO: Nenhum.

DESENVOLVIMENTO:

Podemos iniciar o estudo de sistemas de equações com problemas que recaiam em equações do 1º grau com duas incógnitas. E a partir da tradução do problema, da experimentação de soluções, discuta a existência de muitas soluções para cada sentença.

Como sugestão, trabalharemos com os seguintes problemas:

Problema 1: A 7ª série A é uma classe com 33 estudantes. Qual poderia ser o número de rapazes?

Peça aos alunos para organizarem as possíveis respostas numa tabela como a que segue, colocando na coluna rapazes, o número de rapazes,

na coluna moça, o número de moças e na coluna moça + rapazes, a soma de número de rapazes e o número de moças.

rapazes	moças	moças + rapazes

Neste problema, a equação:

rapazes + moças = 33

é uma equação do 1º grau com duas incógnitas, que são "moças" e "rapazes". Ela possui várias soluções e algumas delas são:

rapazes = 0 e moças = 33	rapazes = 33 e moças = 0
rapazes = 1 e moças = 32	rapazes = 32 e moças = 1
rapazes = 2 e moças = 31	rapazes = 31 e moças = 2
rapazes = 3 e moças = 30	rapazes = 30 e moças = 3

As equações do 1º grau, que possuem mais de uma incógnita, geralmente têm muitas soluções.

Em seguida acrescente ao problema a informação:

Problema 2: O dono da cantina para não ter que mudar a tabela de preços diariamente, introduziu uma “moeda”, que batizou de upl (unidade de preço dos lanches).

Nesta 7ª série com 33 estudantes, cada aluno tem uma só “moeda”. Alguns têm “moedas” de 4 upl e outros têm “moedas” de 8 upl. Juntando todas as 33 “moedas”, o total de upl é 180. Quantos são os alunos que possuem “moedas” de 4 upl e quantos são os alunos que possuem “moedas” de 8 upl?

Solicite que organizem as possíveis respostas numa tabela, de 6 colunas, colocando na:

Coluna “ moeda4”, o número de moedas de 4 upl.

Coluna “moeda8”, o número de moedas de 8 upl.

Coluna “moeda4 + moeda8”, a soma do número de moedas de 4 upl com o número de moedas de 8 upl.

Coluna “4 x moeda4”, a quantia em upl, resultante do número de moedas de 4 upl.

Coluna “8 x moeda8”, a quantia em upl, resultante do número de moedas de 8 upl.

E coluna “ 4 x moeda4 + moeda8”, a quantia total da classe, em upl.

Por exemplo, supondo que fossem 5 moedas de 4 upl, então haveria 28 moedas de 8 upl.

Moeda4	Moeda8	Moeda4+moeda8	4xmoeda4	8xmoeda8	4xmoeda4+8xmoeda8
5	28	33	20	224	244

Neste caso, são duas as equações que traduzem as condições do problema:

1ª) moeda 4 + moeda8 = 33.

A soma do número de moedas de 4 upl com o número de moeda de 8 upl é 33.

2ª) 4 x moeda4 + 8 x moeda8 = 180.

A quantia total da classe, em upl, é 180.

As duas equações são de 1º grau com duas incógnitas.

As incógnitas são:

moeda4 e moeda8

O número de moedas de 4 upl igual a 21 e o número de moedas de 8 upl igual a 12, satisfazem as condições do problema.

1ª) 21 + 12 = 33

2ª) 4 x 21 + 8 x 12 = 180

Problema 3: Numa garagem estão estacionados automóveis e motos. Há 42 veículos e 132 pneus (sem contar os estepes, que são os pneus

de reserva). Quantos são os automóveis e quantos são as motos?

Uma resolução:

42 x 2 = 84	Todos os veículos tem pelo menos 2 pneus.
132 – 84 = 48	A diferença 48 é o número de pneus que os automóveis tem a mais que as motos.
48 ; 2 = 24	24 é o número de automóveis.
42 – 24 = 18	18 é o número de motos.

Ou:

42 x 4 = 168	Se todos os 42 veículos fossem automóveis, haveria 168 pneus.
168 – 132 = 36	Podemos concluir que existem motos, pois há 36 pneus a mais que a informação dada, se considerarmos que todos os veículos são automóveis.
36 : 2 = 18	Para cada automóvel que tiramos dos 42 veículos são necessárias duas motos. Logo, o número de motos é igual a 18.

Outra solução possível dos alunos, é por tentativas.

Supõem-se um número de motos, e obtém se o número de carros, calculando a diferença entre 33 e o número suposto. Sabendo que as motos têm 2 pneus e os carros, 4 pneus, verificam a outra condição do problema, com os valores atribuídos.

Neste caso, peça que organizem as várias tentativas numa tabela, colocando:

Na coluna motos, o número de motos.

Na coluna automóveis, o número de automóveis.

Na coluna motos + automóveis, a soma dos veículos.

E na coluna 2 x moto + 4 x carros, o total de pneus.

motos	carros	motos + carros	2 x moto + 4 x carros

Solicitem que destaquem os valores de motos e carros que satisfazem as duas condições do problema:

motos + automóveis = 33

2 x motos + 4 x automóveis = 132

Diga-lhes que as duas equações com soluções simultâneas formam um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas e que para resolver um problema precisamos encontrar números, que substituídos no lugar das incógnitas, nas duas equações, torna-as verdadeiras. Neste problema, os valores:

motos = 18 e

automóveis = 24,

satisfazem as duas equações do sistema.

É comum, indicar as incógnitas por letras do nosso alfabeto e escrever as equações, usando essas letras. Por exemplo, denominando o número de motos por m e o número de automóveis por a, o sistema fica representado por:

$$m + a = 42$$
$$3 . m + 4 . a = 132$$

se indicarmos o número de moto por x e o número de automóveis por y, o sistema fica representado por:

$$x + y = 42$$
$$2.x + 4y = 132$$

Problema 4: Num concurso com 20 questões, os candidatos ganham 5 pontos por questões que acertam e perdem 3 pontos por questões que erram e não podem deixar nenhuma questão “em branco”. Quantas questões acertou um candidato que obteve 36 pontos?

Peça que resolvam por tentativas e encontrem a solução dos sistema, ou seja os números que satisfazem as duas equações simultaneamente.

Espera-se que encontrem como resposta os valores 12 para os acertos e 8 para os erros.

ATIVIDADE 27: RESOLVENDO ALGEBRICAMENTE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU COM DUAS INCÓGNITAS.

OBJETIVOS: Equacionar um problema utilizando duas variáveis por meio de um sistema de equações.

PARTE 1: RESOLVENDO SISTEMA PELO MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo I-27.

DESENVOLVIMENTO:

Diga aos alunos, que diante das dificuldades de encontrar soluções para problemas, cujos enunciados podem ser traduzidos por sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas, vamos introduzir resoluções algébricas para tais sistemas, para que eles tenham disponíveis uma outra ferramenta.

Nesta atividade estaremos enfocando dois métodos, o da substituição e da eliminação de incógnitas, para que os alunos possam optar pelo método que lhe for conveniente.

Mencione que, o método da substituição consiste em “isolar” uma das variáveis em uma das equações e substituí-la na outra equação. Obtendo, assim uma equação do 1º grau com uma incógnita. Esta nos dá o valor de uma das incógnitas, com a qual se encontra o valor da outra.

Distribua uma folha-tipo I-27 para cada aluno.

PARTE 2: RESOLVENDO SISTEMA PELO MÉTODO DA ADIÇÃO.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo II-27.

DESENVOLVIMENTO:

Dia aos alunos que um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas, quando uma das variáveis tem coeficientes opostos nas duas equações, como por exemplo:

$$\begin{cases} 2 . x + y = 6 \\ 3 . x - y = 34 \end{cases}$$

pode se aplicar o método da eliminação de incógnitas. Este método consiste na aplicação das seguintes propriedades:

a) Somando-se (ou subtraindo-se) membro a membro duas igualdades, o resultado é ainda uma igualdade.

Exemplo:

$$12 = 3 \times 4$$
$$8 = 6 + 2$$

Adicionando membro a membro

$$12 + 8 = (3 \times 4) + (6 + 2)$$
$$20 = 12 + 8$$
$$20 = 20.$$

b) Multiplicando ambos os membros de uma igualdade por um mesmo número, o resultado

Exemplo:

$$20 = 15 + 5$$

Multiplicando por - 1

$$- 20 = - 15 - 5$$
$$- 20 = - 20$$

FOLHA-TIPO I-27

Resolvendo sistemas pelo método da substituição.

Na atividade anterior você, resolveu os problemas propostos fazendo contas ou por tentativas, “chutando” alguns valores para obter a resposta. Algumas vezes, deu muito trabalho para encontrar as soluções. Talvez, conhecer alguns métodos algébricos de resolução, possa ajudá-lo a resolver os problemas.

Se você sabe resolver equações do 1º grau com uma incógnita e consegue traduzir os enunciados dos problemas para o idioma da Álgebra, tem meio caminho andado para aprender os métodos de resolução de sistema de 2 equações do 1º grau com duas incógnitas.

Primeiro, trabalharemos com o método, chamado da substituição. Veremos como este método é desenvolvido, tomando como exemplo o problema 4 da atividade anterior.

Num concurso com 20 questões, os candidatos ganham 5 pontos por questões que acertam e perdem 3 pontos por questões que erram. Quantas questões acertou um candidato que obteve 36 pontos?

Traduzindo para o idioma da Álgebra, podemos representar por “acertos”, números de acertos e por “erros”, o números de erros.

Assim, a expressão “o concurso tem 2º questões” pode ser escrita pela equação:

$$\text{acertos} + \text{erros} = 20$$

e a sentença, ganhando 5 pontos por questões que acerta e perdendo 3 pontos por questões que erra, um candidato obteve 36 pontos

$$5 \times \text{acertos} - 3 \times \text{erros} = 36.$$

FOLHA-TIPO I-27a.

A resolução do sistema pelo método da substituição consiste "isolar" uma das incógnitas em uma das equações e substituí-la na outra equação.

Por exemplo, na equação:

acerto + erros = 20,

"isolando" a incógnita acerto, temos:

acerto = 2 – erros.

Agora, substitua essa incógnita na equação:

5 x acertos – 3 x erros = 36

....

Você obteve, assim uma equação do 1º grau com uma incógnita. Qual é a incógnita desta equação?

....

Resolva a equação e terá o valor desta incógnita.

....

Substitua o valor encontrado em uma das duas equações para achar o valor da outra incógnita.

....

Verifique se os valores que você encontrou para o número de acertos e para o número de erros satisfazem as equações do sistema.

Tente resolver os problemas seguintes:

Problema 1: Numa loja, há caixas e caixotes. Sabendo-se que, 4 caixotes e 1 caixa pesam 29 quilogramas e que 5 caixotes e 3 caixas pesam 45 quilogramas, qual é o peso de cada caixote e de cada caixa?

FOLHA-TIPO I-27b

Sugestões:

1) Expresse as sentenças seguintes por meio de equações:

   4 caixotes e 1 caixa pesam 29 kg

   e 5 caixotes e 3 caixas pesam 45 kg

2) Represente o sistema formado pelas duas equações.
3) Isole uma incógnita em uma das equações.
4) Substitua esta incógnita na outra equação
5) Resolva esta nova equação
6) Determine o valor da outra incógnita
7) Verifique se os valores encontrados satisfazem as duas equações.

   Resposta: O peso de cada caixa é ... kg e o peso de cada caixote e ... kg.

Problema 2: Um eletricista quer dividir um rolo de fio de 140 metros em 2 partes, de modo que uma parte excede a menor em 20 m.

Sugestões:

1) Traduza as expressões seguintes, por meio de equações:

   a soma das duas partes é 140 metros

   e a maior excede a menor de 20 metros.

2) Resolva o sistema formado pelas duas equações.

Problema 3: Somando o dobro do número de alunos da 7ª série A com o triplo do número de alunos da 7ª série B, temos 171 alunos.

FOLHA-TIPO I-27c

Quantos alunos tem a 7ª Série A, sabendo-se que a 7ª série B tem 2 alunos a mais?

Sugestões:

1) Expresse as sentenças seguintes, por meio de equações:

Somando o dobro do número de alunos da 7ª série A
com o triplo do número de alunos da 7ª série B,
temos 171 alunos.

a 7ª B tem alunos a mais que a 7ª A.

2) Resolva o sistema formado pelas duas equações.

Problema 4: A soma de 2 números é 50 e um deles é 2/3 do outro. Quais são os números?

Sugestões:

1) Expresse as sentenças seguintes por meio de equações:

A soma de 2 números é 50
e um dos números é 2/3 do outro.

2) Resolva o sistema formado pelas duas equações.

Problema 5: As idades de Antonio e Carlos somam 45 anos e há 10 atrás a idade de Antonio era 4 vezes a idade de Carlos. Quantos anos tem cada um hoje?

Sugestões:

1) Expresse, por meio de equações, as sentenças:

as idades de Antonio e Carlos somam 45 anos
e, há 10 atrás, a idade de Antonio era 4 vezes a idade de Carlos.

2) Resolva o sistema formado pelas duas equações.

FOLHA-TIPO I-27d

Problema 6: Dois quilos de arroz e três quilos de feijão custavam R$ 6,30 em novembro de 2011. Um mês depois, os preços de arroz e do feijão subiram respectivamente 20% e 30%, elevando as mesmas mercadorias ao preço de R$ 9,00. Quais eram os preços, por quilo, do arroz e do feijão?

Sugestões:

1) Expresse, por meio de equações, as sentenças:

2 quilos de arroz e 3 quilos de feijão custavam 6,30

o novo preço do arroz

e o novo preço do feijão.

2 quilos de arroz e 3 quilos de feijão passaram a custar R$ 9,00.

Observação: Se o preço do arroz custava x, o aumento de 20% no preço, corresponde 20% de x ou 0,20 . x e no mês seguinte, o novo preço passou a ser:

$$100\% \cdot x + 20\% \cdot x = 1 \cdot x + 0{,}20 \cdot x = ...$$

2) Represente o sistema formado pelas duas equações e resolva o sistema.

FOLHA-TIPO II-27

Resolvendo sistema pelo método da eliminação.

Um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas, quando uma das variáveis tem coeficientes opostos nas duas equações, o método da eliminação de incógnitas pode simplificar a resolução do sistema. Acompanhe o desenvolvimento do método, a partir do seguinte problema:

A soma de dois números é 129 e a diferença é 35. Quais são os números?

Resolução:

1) Representando um dos números por número1 e outro por número2, e expressando, por meio de equações, as sentenças:

a soma de dois números é 129

e a diferença entre os números é 35,

temos o sistema formado pelas duas equações.

número1 + número2 = 129

número1 – número2 = 35

Adicionamos, membro a membro, as duas equações, para que uma das incógnitas desapareça.

número1 + número2 = 129
número1 – número2 = 35
____
2número1 = 164

2) Resolva a equação obtida.
3) Substitua o valor obtido numa das equações dadas e obtenha o valor da outra variável.
4) Verifique se os valores encontrados satisfazem as duas equações
5) Responda: Os números são ....

FOLHA-TIPO II-27a

Agora, resolva os problemas:

Problema 1: Uma conta de R$ 700,00 foi paga com 11 notas, uma de R$ 50,00 e outr4as de R$ 100,00. Com quantas notas de R$ 100,00 foi paga a conta?

1). Expresse, por meio de equações, as sentenças:

a conta foi paga com 11 notas

e a conta de R$ 700,00 foi paga com algumas de R$ 50,00 e outras de R$ 100,00.

2). Resolva o sistema formado pelas duas equações.

Neste caso, como os coeficientes não são opostos, como você procederia para eliminar uma das incógnitas?

Problema 3: Num jogo de adivinhações um jogador ganha 2 pontos quando acerta e perde 1 ponto quando erra. No fim de 20 perguntas, Pedro estava com 25 pontos. Quantas perguntas ele acertou?

1). Expresse, por meio de equações, as sentenças:

o total de acertos e erros correspondem a 20 perguntas

e para cada acerto ganha 2 pontos e para cada erro perde 1 ponto.

Nestas condições, Pedro fez 25 pontos.

2). Resolva o sistema formado pelas duas equações.

Problema 4: Este problema foi inventado por um indiano chamado Mahavira há mais de 1000 anos atrás.

O preço de 9 limões e 7 maçãs é 107 e o preço de 7 limões e 9 maçãs é 101. Qual o preço de cada fruta?

1). Expresse, por meio de equações, as sentenças:

o preço de 9 limões e 7 maçãs é 107

e o preço de 7 limões e 9 maçãs é 101.

2). Resolva o sistema formado pelas duas equações.

FOLHA-TIPO II-27b

Problema 5: A soma dos dígitos de um número de dois dígitos é 10. Trocando a ordem das dezenas, o novo número é igual ao original subtraído de 36.

Sugestões:

1). Representando o dígito da unidade por u e o dígito da dezena por d, a expressão:

$$10 . d + u$$

representa o número original e a expressão 10 . u + d, representa o novo número quando trocamos a ordem dos dígitos.

2). Agora expresse, por meio de equações, as sentenças:

a soma dos dois dígitos é 10

e, trocando a ordem das dezenas,

o novo número é igual ao original subtraído de 36.

3). Resolva o sistema formado pelas duas equações.

ATIVIDADE 28: APLICANDO A IDÉIA DE PROPORCIONALIDADE.

OBJETIVOS: Dividir um número em partes diretamente proporcionais e em partes inversamente proporcionais.

PARTE 1: DIVIDINDO E UM OUTRO JEITO.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo I-28

DESENVOLVIMENTO:

Antes de entregar a folha-tipo I-28 para cada aluno proponha à classe o problema abaixo:

> Rogério deseja distribuir 48 bombons entre seus dois filhos, Leonardo de 14 anos e Catarina de 7 anos, de modo que recebam quantidades iguais. Entretanto, Leonardo, argumentou que deve receber o dobro de Catarina pois sua idade é o dobro. Então, Quantos bombons deveria ganhar cada um deles, se Rogério adotasse este critério?

Dê um tempo suficiente para que os alunos pensem no problema. Percorra a classe, observando o trabalho que estão realizando e se houver dificuldades para resolver a questão, sugira que formem grupos de 3 alunos, no máximo, para discuti-la.

Após este trabalho, peça a um aluno que apresente na lousa sua solução. Em seguida, pergunte se há na classe alguém que tenha resolvido o problema de outras maneiras e discuta a validade ou não delas.

Uma das resoluções que os alunos podem apresentar é a seguinte:

Catarina deve receber x bombons

Leonardo recebe, então $2 . x$ bombons

Logo:

$$x + 2 . x = 48$$

$$3 . x = 48$$

$$x = 16.$$

Caberia, portanto, 16 bombons à Catarina e 32 ao Leonardo segundo o critério que ele próprio esta propondo.

Em seguida, entregue a cada aluno a folha-tipo e peça que eles resolvam apenas o problema 1 da folha. Os problemas 2 e 3 devem somente ser resolvidos após a correção do primeiro.

Explique à classe que, em muitas sociedades comerciais o lucro não é repartido equitativamente, pois nem sempre os capitais com que os sócios formam a firma são iguais. Entretanto, em algumas o lucro é dividido em partes iguais, mesmo que os sócios não participem com o mesmo capital, pois compensam este fato trabalhando mais horas.

Após esta discussão, proponha aos seus alunos que dividam o lucro do problema da folha proporcionalmente ao número de horas que cada um trabalhou. Isto é para o problema em questão, se uma pessoa trabalha o dobro

ela deve ganhar o dobro, se trabalhar o triplo deve ganhar o triplo, etc.

Peça aos grupos para explorarem suas conclusões e mesmo que não apareçam as resoluções aqui descritas trabalhe com a classe todas elas. Verificando os diversos modos de se resolver um problema pode-se aumentar o grau de compreensão sobre ele, bem como retomar alguns conceitos. Explique a importância deste trabalho aos alunos.

1). Uma das resoluções:

Total de horas diárias trabalhadas pelos sócios:

$$7 + 5 = 12.$$

Razão que indica o número de horas de Mônica em relação ao total:

$$\frac{7}{12}.$$

Razão que indica o número de horas de Mateus em relação ao total:

$$\frac{5}{12}.$$

Mônica deverá, portanto, receber $\frac{7}{12}$ do total, ou seja:

$$\frac{7}{12} \text{ de } 1800 = \frac{7}{12} \times 1800 = 1050.$$

Mateus receberá $\frac{5}{12}$ do total.

$$\frac{5}{12} \text{ de } 1800 = \frac{5}{12} \times 1800 = 750.$$

2). Uma "variante" dessa resolução é determinar a porcentagem de horas que cada um dos sócios trabalhou diariamente em relação ao total de horas:

$$\text{Mônica}: \frac{7}{12} = 0{,}58333... = \frac{58{,}333...}{100} = 58{,}333...\,\% \cong 58{,}33\%$$

$$\text{Mateus}: \frac{5}{12} = 0{,}41666... = \frac{41{,}666...}{100} = 41{,}666...\% \cong 41{,}67\%.$$

58,33% de 1800 = 58,33% x 1800 = 0,5833 x 1800 = 1049,94 ≅ 1050

41,67% de 1800 = 41,67% x 1800 = 0,4167 x 1800 = 750,06 ≅ 750

3). Utilizando sistemas de equações:

Chamando de a o que Mônica deve receber e de b a parte de Mateus, podemos escrever que a relação entre essas partes é:

$$\frac{a}{7} = \frac{b}{5}$$

pois elas são respectivamente proporcionais aos números 7 e 5 (horas de trabalho).

Assim, temos o sistema de equações:

$$\begin{cases} a + b = 1800 \\ \frac{a}{7} = \frac{b}{5} \end{cases}$$

Da equação $\frac{a}{7} = \frac{b}{5}$ podemos concluir que: $a = \frac{7\,.\,b}{5}$.

Substituindo o valor encontrado para a, na equação a + b = 1800, obtém-se a equação:

$$\frac{7\,.\,b}{5} + b = 1800$$

Uma resolução da última equação:

$$7 . b + 5 . b = 1800 \times 5$$

$$12 . b = 9000$$

$$b = 750, \quad e$$

$$a = 1800 - 750 = 1050.$$

3). Outra resolução:

Como as partes procuradas a e b são proporcionais a 7 e 5, podemos escrever:

$$\frac{a}{7} = \frac{b}{5} = k$$

sendo k constante (constante de proporcionalidade).

Como, $\frac{a}{7} = k$ e $\frac{b}{5} = k$, então $a = 7 . k$ e $b = 5 . k$

Substituindo os valores encontrados para a e b, respectivamente, por 7 . k e 5 . k na equação a + b = 1800, temos:

$$7 . k + 5 . k = 1800$$

$$12 . k = 1800$$

$$k = 150.$$

Logo:

$$a = 7 . k = 7 \times 150 = 1050$$

e

$$b = 5 . k = 5 \times 150 = 750$$

Uma estratégia interessante para os problemas 2 e 3 da folha-tipo I-28 é propor aos grupos que cada aluno faça o problema de um modo diferente do outro e discutam, depois, as diversas resoluções encontradas.

Garanta, pelo menos, que no problema 2 todos os alunos determinem a porcentagem de participação de cada sócio na empresa, calculada através da razão entre o capital do sócio e o capital total, pois normalmente é assim que se procede na maioria das firmas limitadas.

Aqui pode se originar um trabalho de natureza interdisciplinar: a pesquisa sobre como são estabelecidas as participações de sócios nas empresas, desde as pequenas até as multinacionais. E também o sistema de ações das sociedades anônimas.

PARTE 2: A PROPORCIONALIDADE E O LEGISLATIVO.

MATERIAL NECESSÁRIO: Nenhum.

DESENVOLVIMENTO:

Uma aplicação interessante do conceito de divisão em partes proporcionais são as regras de representação parlamentar. Os alunos poderão realizar uma pesquisa sobre a representação parlamentar nas Câmaras Municipais, Assembléias Legislativa e no Congresso Nacional. Para isto poderão consultar além da literatura especializada, os partidos políticos e as próprias instituições.

Coloque as seguintes questões para pesquisa:

- É muito comum um candidato a vereador (ou deputado) não se eleger apesar dele ter conseguido significativamente mais votos que um outro que foi eleito. Após contados os votos dos candidatos ao Legislativo,

Quais são os cálculos que devem ser feitos para se decidir quem se elege?

- A imprensa noticia sempre que muitos políticos, empresários, estudantes, trabalhadores paulista reclamam que apesar do Estado de São Paulo ter o maior número de deputados federais, não possui um número proporcional à quantidade de eleitores, isto se compararmos com a representatividade de outros estados. Se levássemos em conta apensas o número de deputados federais do Estado de Rondônia, quanto deputados federais deveria ter o Estado de São Paulo?

Após a pesquisa um debate com a classe poderá ser feito sobre a justiça ou não de se impor um limite à representatividade parlamentar de um estado em relação ao número de eleitores, na Câmara.

Outra boa questão é discutir as vantagens/desvantagens da eleição de um parlamentar não estar só vinculada ao número de votos que ele obteve, mas também ao número de votos do partido.

PARTE 3: PROCURANDO UM OUTRO JEITO PARA DIVIDIR.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo II-28.

DESENVOLVIMENTO:

Distribua uma folha-tipo II-28 para cada aluno e peça que em grupos discutam a questão A desta folha.

Se você julgar necessário, retome o conceito de grandezas que variem inversamente e sua representação. Pode-se propor, por exemplo, as seguintes questões para este trabalho:

1). O que são grandezas inversamente proporcionais?

2). Sabe-se que as grandezas X e Y da tabela I são diretamente proporcionais, as grandezas P e Q da tabela II são inversamente proporcionais e as grandezas U e V da tabela III não são nem direta, nem inversamente proporcionais. Justifique cada uma das afirmações com base nos valores relacionados em cada uma delas:

a).

X	12	6	36	3
Y	30	60	10	120

b).

P	12	6	36	3
Q	8	4	24	2

c).

U	12	6	36	3
V	25	13	73	7

No caso a), como:

$$12 \text{ x } 30 = 60 = 36 \text{ x } 10 = 3 \text{ x } 120 = 360,$$

dizemos que X e Y são inversamente proporcionais, porque o produto é constante e indicamos X . Y = 36 . Uma maneira bastante comum para indicar

este fato é dizer que X é diretamente proporcional ao inverso de Y ou que X é inversamente proporcional a Y:

$$\frac{X}{\frac{1}{Y}} = \frac{12}{\frac{1}{30}} = \frac{6}{\frac{1}{60}} = \frac{36}{\frac{1}{10}} = \frac{3}{\frac{1}{120}}.$$

Na discussão das questões do problema A da folha-tipo é importante destacar quem tiver maior número de filhos pagará a menor parte da multa e quem tiver o menor número de filhos pagará a maior parte. Sendo mais precioso quem tem o dobro de filhos em relação a um paga a metade que este, se o número de filhos fosse três vezes menor pagaria o triplo, etc.

Verifique a validade/não validade das resoluções encontradas pelos alunos. Mesmo que todas as maneiras descritas abaixo para resolver o problema não surjam, discuta todas elas com seus alunos.

1). x, y e z são parcelas que, devem ser respectivamente pagas por Murilo, Nelson e Pedro, e indicamos:

$x + y + z = 39\ 600.$

Como x, y, e z são inversamente proporcionais a 2, 4 e 6, respectivamente, dizemos que x, y e z são diretamente proporcionais a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{6}$ e escrevemos:

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{4}} = \frac{z}{\frac{1}{6}}$$

Logo:

$$3 . x = 4 . y = 6 . z$$

e colocando y e z em função de x:

Da equação $2 . x = 4 . y$, concluímos que:

$$y = \frac{2 . x}{4}, \text{ ou } y = \frac{x}{2},$$

e da equação $2 . x = 6 . z$, concluímos que:

$$z = \frac{2 . x}{6}, \text{ ou } z = \frac{x}{3}$$

Substituindo os valores encontrados para y e z em $x + y + z = 39600$, temos:

$$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 39600$$

Resolvendo a última equação obtemos $x = 21600$.

Logo, $y = 10800$ e $z = 7200$.

2). Poderíamos, também resolver assim o problema:

Como x, y e z são inversamente proporcionais a 2, 4 e 6 pode-se indicar este fato da maneira:

$$x . 2 = y . 4 = z . 6 = k \text{ (constante)},$$

o que nos permite escrever:

$$x . 2 = k, \text{ ou } x = \frac{k}{2},$$

$$y . 4 = k, \text{ ou } y = \frac{k}{4},$$

$z \cdot 6 = k$, ou $z = \frac{k}{6}$.

Substituindo os valores encontrados para x, y e z, em $x + y + z = 39600$ temos:

$$\frac{k}{2} + \frac{k}{4} + \frac{k}{6} = 39600$$

$$6 \cdot k + 3 \cdot k + 2 \cdot k = 39600 \times 12$$

$$11 \cdot k = 39600 \times 12$$

$$k = 43200.$$

Então:

$$x = 43200 : 2 = 21600$$

$$y = 43200 : 3 = 10800$$

e $z = 43200 : 6 = 7200$.

Em seguida, solicite que resolvam os problemas B e C da folha-tipo II-28.

FOLHA-TIPO I-28

Repartindo de um outro jeito.

1. Mônica e Mateus são dois irmãos, donos de uma loja de secos e molhados, e desejam repartir o lucro de US$ 1800,00 (dólares americanos), obtidos em uma quinzena. Cada um deles se dedicou à loja, nesta quinzena, tempos diferentes, Mônica trabalhou 7 horas diárias e Mateus por 5 horas.

Supondo que eles resolvam dividir o lucro em partes diferentes, Mônica poderia receber uma quantia maior porque se dedicou à loja mais tempo. Quanto cada um dos irmãos deve, então, receber se a divisão do lucro for diretamente proporcional ao tempo que cada sócio dedicou à loja?

2. Afonso, Bernardo e Carlito são três amigos que abriram um pequeno negócio para ganhar algum dinheiro com a venda de produtos naturais. Apesar dos três se dedicarem o mesmo número de horas a este trabalho eles não dividem o lucro em partes iguais pois os capitais com que entraram na firma são diferentes: Afonso empregou uma quantidade de dinheiro equivalente a 250 dólares, Bernardo 500 dólares e Carlito 750 dólares. Se o lucro de uma semana foi 300 dólares quanto cada um deve receber, se o lucro for dividido proporcionalmente aos capitais?

3. Dividir 720 em partes diretamente proporcionais a 2, 3 e 4.

4. Dividir 720 em partes diretamente proporcionais a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$.

FOLHA-TIPO II-28

Procurando outro jeito para repartir.

A. Murilo, Nelson e Pedro são três vendedores de uma fábrica e foram a uma cidade vizinha de automóvel para fechar uma grande venda. Como estavam atrasados, Murilo e Nelson pediram a Pedro que dirigia o carro para aumentar a velocidade. Instantes depois, foram multados por um policial rodoviário por excesso de velocidade. Começaram, então a discutir quem pagaria a multa. Inicialmente pensaram pagar em partes iguais. Entretanto, como não preferiram realizar o negócio e estavam com pouco dinheiro quiseram dividir em partes diferentes. Resolveram o seguinte: dividiriam a multas em partes inversamente proporcionais ao números de filhos de cada um. Murilo tem 2 filhos, Nelson tem 4 e Pedro 6 filhos. A multa foi o equivalente a 60 dólares. Responda às seguintes questões:

a) Segundo o critério estabelecido quem deve pagar a menor parcela da multa? E quem pagaria a maior parcela?

b) Pense em uma razão para terem escolhido dividir a multa em partes inversamente proporcionais ao números de filhos de cada um.

c) Você sabe que pode tratar duas grandezas inversamente proporcionais como se uma fosse diretamente proporcional ao inverso da outra. Levando isto em conta, divida o valor da multa entre os três segundo o critério escolhido por eles.

B. Dona Felicita é uma professora de Matemática e quer dividir 1680 balas entre duas alunas, Ana e Bia. Propôs às duas garotas três

critérios para esta divisão e quem terminasse primeiro e corretamente o quanto que cada uma receberia segundo cada maneira, escolheria o melhor critério para a professora fazer a distribuição. Descubra qual deles seria melhor para cada uma das garotas.

I) Divisão das 1680 balas em partes iguais.

II) Divisão das balas em partes diretamente proporcionais ao número de acertos da última avaliação. Ana acertou 3 e Bia 4 questões.

III) Divisão das balas em partes inversamente proporcionais às faltas de cada uma no último bimestre. Ana faltou 5 vezes e Bia 3.

C. Dividir 720 em partes inversamente proporcionais a 2, 3 e 4.

D. Dividir 1440 em partes inversamente proporcionais a $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$.

ATIVIDADE 29: MATEMÁTICA COMERCIAL.

OBJETIVO: Interpretar e resolver problemas que envolvem porcentagens e juros.

PARTE 1: DE QUEM É O ERRO?

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo I-29.

DESENVOLVIMENTO:

Distribua uma folha-tipo I-29 para cada aluno e peça que em pequenos grupos discutam inicialmente apenas a situação A da folha.

Dê tempo suficiente para eles resolverem a questão proposta. Muitos dos nossos alunos podem pensar que o procedimento de Fernanda está correto para determinar o antigo preço da calça. A intenção desta parte da atividade é colocar em cheque este raciocínio, ou seja, pretende-se que eles percebam que, como a majoração de 50% foi sobre o preço anterior, não tem sentido, então, descontar 50% do novo valor para se determinar o preço anterior.

Cada grupo deverá expor suas conclusões a respeito da situação. Discuta com a classe todas elas e sugira o seguinte procedimento:

Chamando de P o antigo preço da calça e como seu preço teve um aumento de 50% escrevemos:

$$P + 50\% \text{ de } P = 18000$$
$$P + 0{,}5 \cdot P = 18000$$
$$1{,}5 \cdot P = 18000$$
$$P = 12000$$

De fato:

$$12000 + 50\% \text{ de } 12000 = 12000 + 6000 = 18000.$$

Antes de passas à situação B da folha-tipo I-29, convém também utilizar a regra de três para se calcular uma porcentagem. Por exemplo: Catarina acertou em um teste de história 75% das questões. Se a prova continha 24 testes, quantos destes ela acertou? Ou seja, quanto é 75% de 24?

1). A forma que vem sendo trabalhada desde a 4ª série:

75% de 24 significa $\frac{75}{100}$ de 24, que significa $\frac{75}{100} \times 24 =$

$$= 0{,}75 \times 24 = 18$$

2). Uma outra maneira para trabalhar porcentagem é utilizar regra de três:

A informação que ela acertou 75% das questões quer dizer que se a prova tivesse 100 questões ela teria acertado 75. Mas como foram 24 ...

100 - - - - - - - - - - - - 75

24 - - - - - - - - - - - - x

como são diretamente proporcionais, escrevemos:

$\frac{100}{24} = \frac{75}{x}$, ou 100 . x = 24 x 75, ou ainda x = 1800 : 100 = 18.

Após o trabalho com a situação A proponha a situação B e assim por diante.

A situação B não oferece tantas dificuldades. O lucro é igual a 6000 – 4500 = 1500 e determina-se a taxa percentual de lucro sobre o preço de custo:

4500 (de custo)	1500 (lucro)
100	x

4500 . x = 1500 x 100, ou x = 15000 : 4500, ou então, x = 33,33 ...%

Poderíamos determinar esta porcentagem calculando a razão entre o lucro obtido e o preço de custo.

$\frac{1500}{4500} = 0{,}333\ ... = \frac{33{,}333\ ...}{100} = 33{,}33\ ...\% \cong 33{,}33\%$

A porcentagem do lucro sobre o preço de venda poderia ser assim calculada:

6000 (venda)	1500 (lucro)
100	x

6000 . x = 15000 ou seja x = 25%

Ou

$\frac{1500}{6000} = 0{,}25 = \frac{25}{100} = 25\%$

O item a) do problema C da folha pode ser determinado pelos alunos, pois se deseja saber o preço de venda, conhecidos o valor do custo e a taxa de lucro sobre o custo.

Duas maneiras possíveis de resolvê-lo:

1ª) O preço de venda V é calculado somando-se o lucro L com o custo P:

$$V = P + L$$

e determinamos L da seguinte forma:

$$L = 25\% \text{ de } 15000 = 0{,}25 \times 15000 = 3750$$

$$V = 15000 + 3750 = 18750.$$

2ª) Determinando primeiro o fator que se deve multiplicar o preço de custo P, para calcular V diretamente:

$$V = P + 25\% \text{ de } P = P + 0{,}25 \cdot P = 1{,}25 \cdot P$$

Logo $V = 1{,}25 \times 15000 = 18750$

Entretanto, o item b) do problema C da folha-tipo I-29 oferece um grau de dificuldade maior, pois deseja-se saber qual deve ser o preço de venda, conhecidos o preço de custo e a taxa de lucro sobre o preço de venda.

Duas maneiras de indicar a resolução:

1ª) Como a taxa de 25% é sobre o preço de venda, dizemos que a cada 100,00 arrecadados na venda, temos um lucro de 25,00 e os restantes 75,00 correspondem ao custo. Assim:

100 (de venda) - - - - - - - - - - 75 (de custo)

V (de venda) - - - - - - - - - - - 15000 (de custo)

$75 . V = 15000 \times 100$,   ou $75 . V = 1500000$.

Portanto: $V = 20000$.

2ª) Como a taxa e de 25% sobre o preço de venda V dizemos que o lucro L é determinado por 0,25 . V. Assim:

$$V = P + L$$

$$V = P + 0,25 . V$$

$$V - 0,25 . V = P$$

$$0,75 . V = P$$

Portanto: $V = 20000$.

Após a discussão das situações A, B e C proponha os problemas da parte D da folha-tipo I-29.

COMENTÁRIOS:

Não podemos esperar que os alunos se apropriem, neste momento, de todas as idéias tratadas nesta atividade dado o grau de dificuldade. Mais problemas como estes podem e devem ser propostos, em outros momentos, oferecendo, assim, mais oportunidades para sua aprendizagem. A importância deste tema ainda nesse grau de ensino é bastante evidente: além de sua vasta utilização no cotidiano e no trabalho das pessoas, muitos de nossos alunos prestam concursos para cargos públicos, em bancos etc e o número de questões envolvendo este assunto, nesses concursos, é bastante significativo.

PARTE 2: RENUMERAÇÃO DO CAPITAL.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo II-29 e calculadora.

DESENVOLVIMENTO:

Alguns dias antes da aula planejada para o desenvolvimento dessa parte da atividade, entregue a folha-tipo II-29 e peça aos alunos que pesquisem nos cadernos de economia dos jornais alguns tipos de aplicações financeiras existentes no mercado financeiro (poupança, ouro, dólar, ...) e suas respectivas taxas de remuneração, como mostra o quadro a seguir. Eles poderão recortar o artigo, colar no seu caderno e resumir o significado de cada investimento. Os cálculos e as questões propostas na folha poderão ser trabalhados em classe.

Em pequenos grupos os alunos poderão fazer os cálculos (com o auxílio da calculadora) e discutir as questões propostas na folha-tipo II-29.

É importante que se discuta, também, em classe, a questão da remuneração do trabalho. Procure trazer alguns elementos para esta

discussão: livros ou artigos de jornais que, por exemplo, analisem a questão da distribuição de renda.

Se você julgar conveniente faça um trabalho integrado com os professores de História e de Geografia sobre a questão Capital x Trabalho.

Evidentemente não se tem a intenção que nossos alunos dominem o significado de cada aplicação financeira e nem as implicações políticas a respeito do Trabalho e sua remuneração. Entretanto, gostaríamos de ir além do cálculo de porcentagens. O objetivo é colocar o aluno, aos poucos, em contato com todas estas questões, uma vez que elas estão cada vez mais freqüentes no nosso cotidiano e presentes nos meios de comunicação.

Fornecendo indicações para leitura e proporcionando momentos de reflexão sobre este tema estaremos colaborando na formação de um cidadão pleno.

PARTE 3: INFLAÇÃO, TODOS PERDEM?

MATERIAL NECESSÁRIO: Calculadora.

DESENVOLVIMENTO:

Proponha à classe a seguinte situação:

Carmem precisava fazer alguma compras. Pesquisou os preços em diversos locais e na loja com preços mais acessíveis verificou que para comprar o que queria, precisaria desembolsar uma quantia equivalente a 2,65 salários mínimos. Achando que era muito dinheiro, resolveu aplicar esta

na poupança esperando que o rendimento em um mês fosse maior que o aumento dos preços dos objetos.

a). Qual é o valor de 2,65 salários mínimos?

b). Você acha que ela conseguira comprar tudo que pretendia e sobrar dinheiro daqui a 30 dias?

Discuta com a classe as hipóteses levantadas pelos alunos.

Sugira, então, aos alunos que pesquisem em jornais, lojas etc os preços de 5 objetos quaisquer de preferência de natureza diferentes como eletrodomésticos, alimentos, roupas, anotando suas especificações, marcas, tamanho, etc.

Peça que dêem o custo total desses objetos na nossa moeda, convertam esta quantia em dólares e também verifiquem quantos salários mínimos ela corresponde. Eles deverão imaginar que o dinheiro equivalente ao preço total dos objetos será investido na caderneta de poupança.

Passados 30 dias, a tarefa será verificar a possibilidade de comprar os mesmos objetos escolhidos:

a) Com o montante obtido na poupança.
b) Com a mesma quantidade de dólares.
c) Com a mesma quantidade de salários mínimos.

As respostas para a) e b) provavelmente serão afirmativas, porém é possível que os preços tenham subido mais que os rendimentos obtidos na poupança.

Normalmente o aumento dos salários não acompanha a inflação e é possível que a resposta para c) seja negativa.

Discuta, também, com a classe no momento do retorno a esta atividade (30 dias após) as seguintes questões:

a) Os investimentos em dólar e poupança tiveram o mesmo rendimento?

b) Ambos ganharam dos índices de inflação divulgados pelos institutos? E os salários?

c) Por que o trabalhador sempre perde com a inflação?

d) Se uma pessoa aplicar uma quantia razoável na caderneta de poupança e gastar apenas os rendimentos (juros e correção monetária) o que provavelmente ocorrerá em poucos meses se houver inflação?

e) Quem você acha que ganha com a inflação?

O fundamental na discussão dessas questões é que os alunos concluam que pequeno investidor não tem dinheiro, nem informações (só boato) e muito menos tempo (afinal ele precisa trabalhar) para trocar no momento exato a aplicação: trocar ações por dólar, vender depois os dólares e investir no "Fundão" para colocar na melhor data da poupança e depois comprar telefones, ações, ouro, dólar novamente.

O máximo que um trabalhador consegue com estas aplicações é proteger um pouco suas economias da inflação na caderneta de poupança, uma vez que os salários sempre são corrigidos por taxas menores que as da inflação. Evidentemente, os bancos (não só eles) conseguem obter grandes lucros com a inflação.

PARTE 4: COM JUROS NÃO SE BRINCA.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo III-29 e calculadora.

DESENVOLVIMENTO:

Antes de distribuir a folha-tipo III-29 para cada aluno, coloque o problema na lousa o problema do quadro e que também consta na folha e peça que eles resolvam da forma como eles o entenderam.

Caio pediu emprestado a Bia a quantia de R$ 6000,00. Combinaram que a dívida seria paga depois de 3 meses à taxa de 20% ao mês. Quanto Caio deverá pagar a Bia?

Após algum tempo distribua a folha-tipo III-29 que mostra duas interpretações possíveis para o enunciado do problema e peça para discutirem, em grupos, as duas soluções e responderem às questões propostas.

Após a análise e discussão das respostas de cada grupo com toda a classe espera-se que tenham compreendido a diferença entre os dois regime de juros: simples e compostos.

O primeiro valor, que provavelmente a maioria dos alunos pode ter achado correta, aplica a taxa sempre em relação ao capital inicial, ou seja, considera a situação como um problema de juros simples ou capitalização simples.

Na segunda maneira, os juros produzidos em um mês eram incorporados à dívida de modo que eles também renderam juros (juros sobre

juros) par o mês seguinte. Esta solução encara o problema como de juros compostos ou capitalização composta.

Explique à classe que a maioria das operações financeiras em nosso país adota o regime de capitalização composta. Peça aos alunos para encontrarem justificativas para tal fato.

Após este trabalho solicite que resolvam os demais problema da folha-tipo III-29.

A tradicional fórmula dos juros simples:

$$j = C \cdot i \cdot t$$

onde i é a taxa, é desnecessária se os alunos dominarem os cálculos com porcentagem. Como as taxas de juros simples são proporcionais, pode-se dividi-las ou multiplicá-las, conforme o período de tempo considerado.

Por exemplo, um capital empregado por 24 horas à uma taxa de 90% ao bimestre, corresponde a uma taxa:

$$90\% : 60 = 1{,}5\% \text{ ao dia}$$

e em 24 dias teremos uma taxa de 36%, pois 1,5% x 24 = 36%..

O raciocínio acima não poderá ser feito em problemas que envolvam juros compostos.

Os problemas que podem ser tratados no 1º grau sobre capitalização composta devem ser apenas sobre o cálculo dos juros e do montante, período à período com auxilio de calculadoras, não sendo indicado, no momento, o uso de fórmulas, pois envolve conceitos matemáticos que os alunos desconhecem.

FOLHA-TIPO I-29

De quem é o erro?

A. Fernanda é uma garota, de 11 anos e se deparou com o seguinte problema. Foi à loja e ao saber o preço de um jeans ficou decepcionada pois achou um pouco caro: R$ 180,00. A vendedora informou, também, que o preço fora reajustado em 50% sobre o preço do dia anterior. Fernanda fez o seguinte cálculo para determinar o preço antigo da calça:

$$50\% \text{ de } 180 = \frac{50}{100} \text{ de } 180 = 0{,}5 \times 180 = 90.$$

No entanto, a vendedora disse que o preço anterior não era R$ 90,00 e sim R$ 120,00. Evidentemente, há um erro aqui. Qual foi o erro? Quem errou?

B. Comprei um livro por R$ 45,00 e o revendi por R$ 60,00. Qual a porcentagem do meu lucro sobre o preço de custo? E sobre o preço de venda?

C. Comprei um quadro por R$ 1500,00 e desejo vende-lo. Qual deve ser, então, o preço de venda:

a) Se pretendo ter um lucro de 25% sobre o preço de custo?

b) Se pretendo ter um lucro de 25% sobre o preço de venda?

FOLHA-TIPO I-29a

D. I) Um negociante comprou um automóvel por US$ 10000,00. Se ele deseja obter um lucro (sobre o custo) de 15%, por quanto deverá vender o carro?

II) Rica comprou sua bike por US$ 750,00 e vendeu por US$ 1250,00. Qual foi a taxa de lucro que obteve sobre o preço de custo? E sobre o preço de venda?

III) Bia pagou uma conta de R$ 600,00. Neste valor já esta incluída a multa de 20% sobre o valor que deveria ser pago. Qual era esse valor?

IV) Paulo comprou alguns selos por R$ 360,00. Por quanto deverá vendê-lo se planeja lucrar 40% sobre o preço de venda?

V) Em uma classe de 45 alunos, 27 são garotas. Qual a porcentagem dos garotos em relação ao total da classe?

VI) Os vencimentos brutos de Maria Clara foram R$ 6784,00. Os descontos foram da ordem de 17,5%. Qual foi o líquido recebido por Maria Clara?

VII) Ao comprar um eletrodoméstico por R$ 1600,00, obteve-se um desconto de R$ 250,00. Qual foi a taxa de desconto?

FOLHA-TIPO II-29

Renumeração do Capital.

Ao emprestarmos uma certa quantia a uma pessoa é possível que recebamos depois de algum tempo uma quantia maior que a emprestada, mesmo que não haja inflação. Afinal, quando alguém cede uma casa para outra ela não recebe aluguel? Quando uma pessoa empresta dinheiro ela não poderia receber um "aluguel" de quem pediu emprestado?

Freqüentemente você lê em jornais que as taxas de juros aumentaram, que a poupança rendeu mais que os outros investimentos, etc.; palavras como Capital, Juros acabam fazendo parte do dia a dia de muitos brasileiros. Vejamos o que significa algumas delas:

Juros (ou rendimento) é a quantia recebida ou paga, pela utilização de um capital.

Investimento ou Aplicação: quando o dono do capital recebe juros por ter emprestado dinheiro para alguém, por empregar dinheiro em caderneta de poupança, quando alguém compra um imóvel e ganha dinheiro com aluguel ou na revenda. Resumindo, quando alguém emprega um capital para fazer mais capital.

Montante: é a soma do capital com os juros obtidos.

Principal: é o Capital Inicial, o que dá início a uma operação financeira.

1. Procure no caderno de finanças de um jornal as taxas de juros de algumas aplicações financeiras e veja qual está sendo o melhor investimento do momento para um aplicador.

FOLHA-TIPO II-29a

Caso você não conheça os significados dessas aplicações faça uma pesquisa para conhecê-las até consultando, instituições financeiras se for necessário.

2. Com um capital inicial equivalente a 5 salários mínimos investidos em cada uma das aplicações, determine os juros e o montante que você teria em cada caso ao final de um mês de acordo com as taxas pesquisadas.

De certa forma é aceitável que alguém ganhe algum dinheiro ao emprestar um capital a outro, desde que as taxas não sejam extorsivas. Há legislação sobre assunto, porém algumas pessoas aproveitam a ingenuidade ou a necessidade urgente de dinheiro de outras e cobram taxas exorbitantes, desrespeitando a lei.

Falamos sobre a remuneração do Capital, mas e a remuneração do TRABALHO? Você acha justo a forma como a Sociedade trata a questão do trabalho? Discuta com seus colegas, amigos e professores sobre este assunto.

3. Compare os rendimentos das aplicações financeiras do mês passado com o "aumento" do salário mínimo no mesmo período. O que aumentou mais os juros ou o salário?

4. Aumento real de salário. Você saberia dizer o que significa esta expressão?

FOLHA-TIPO III-29

Com juros não se brinca.

1. Caio pediu emprestado a Bia a quantia de R$ 5000,00. Combinaram que a dívida seria paga depois de 3 meses à taxa de 20% ao mês. Quanto Caio deverá pagar a Bia?

Findo o prazo, Caio apresentou à Bia os seguintes cálculos para determinar o montante da dívida:

Período	Dívida no início do mês	Juros do mês	Dívida no fim do mês
1º mês	5000,00	20% de 5000 = 1000	5000 + 1000 = 6000
2º mês	6000,00	20% de 5000 = 1000	6000 + 1000 = 7000
3º mês	7000,00	20% de 5000 = 1000	7000 + 1000 = 8000

Bia discordando do valor de R$ 8000,00 para o montante da dívida calculado por Caio e apresentou os cálculos da tabela abaixo que apontam o valor de R$ 8640,00 para a dívida:

Período	Dívida no início do mês	Juros do mês	Dívida no fim do mês
1º mês	5000,00	20% de 5000 = 1000	5000 + 1000 = 6000
2º mês	6000,00	20% de 6000 = 1200	6000 + 1200 = 7200
3º mês	7200,00	20% de 7200 = 1400	7200 + 1440 = 8640

a) Você acha que as regras para o cálculo dos juros foram bem esclarecidas por Bia e Caio? Por quê?

b) Pode-se afirmar que uma forma é mais correta que outra? Por quê?

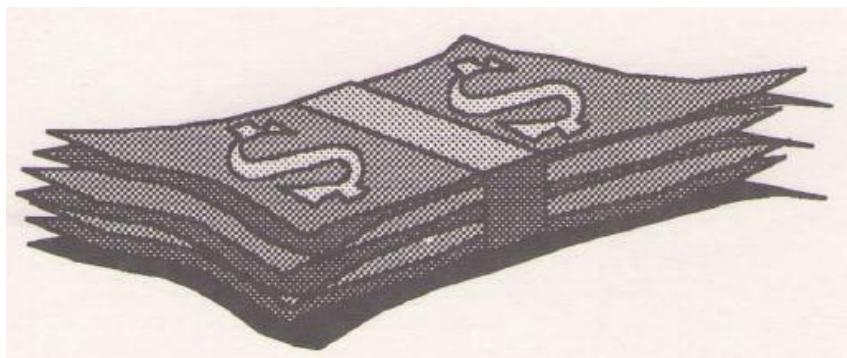
FOLHA-TIPO III-29a

c) O que você modificaria no enunciado para não haver confusões?

d) Com o plano de Caio poderíamos ter calculado diretamente o montante, pois 3 x 20% = 60%; como 60% de R$ 5000,00 é igual a R$ 3000,00, obtém-se o montante de R$ 8000,00. Porque esta forma de calcular não funciona para o plano de Bia?

2). Adriana Aplicou R$ 8000,00 à taxa de 30% ao mês durante quatro meses. Quanto receberá de juros se o regime de juros adotado for o mesmo dos cálculos de Caio do Problema 1 (juros simples) E se o regime adotado fosse o mesmo dos cálculos de Bia (juros compostos).

3). Se eu tomar emprestado uma certa quantia à taxa de 10% ao mês e liquidar a dívida em 4 meses em que regime terei que pagar um juro de 40% sobre o valor emprestado?

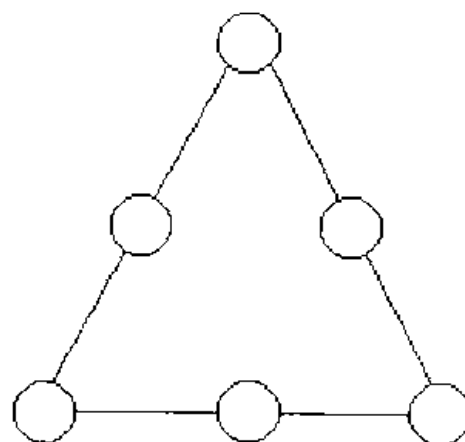
4). Meu salário em maio era de R$ 9000,00. Nos meses de junho, julho e agosto foi aumentado sucessivamente (aumento sobre aumento) em 25%, 30% e 15%, respectivamente. Pode-se dizer que meu salário em agosto teve um acréscimo de 25% + 30% + 15% = 70%. Qual foi meu salário em agosto?

ATIVIDADE 30: PROBLEMAS DE CONTAGEM.

OBJETIVOS: Resolver problemas por ensaio e erro.
Inferir resultados gerais através da indução.
Utilizar o raciocínio combinatório.

PARTE 1: O TRIÂNGULO MÁGICO.

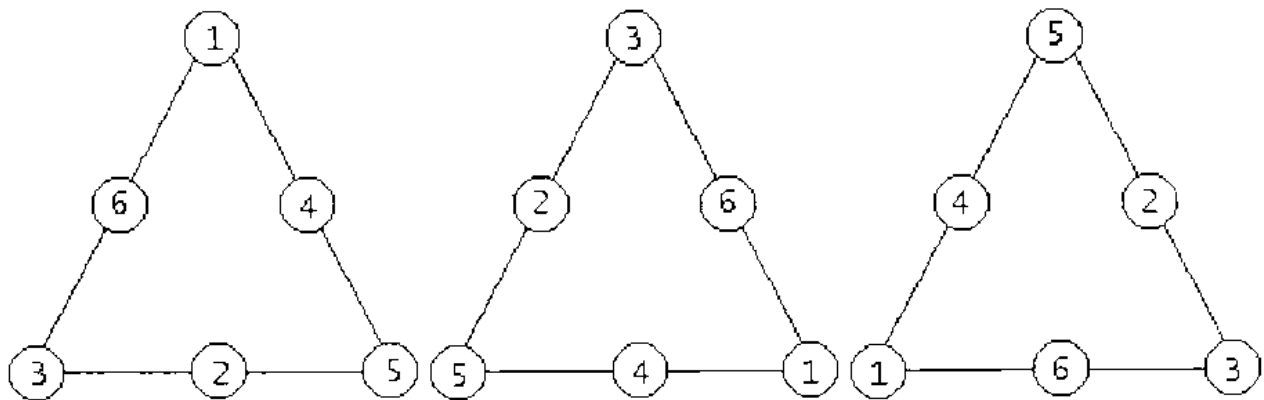
MATERIAL NECESSÁRIO: Nenhum.

DESENVOLVIMENTO:

Desenhe na lousa um triângulo como o que esta indicado ao lado e solicite aos alunos que por tentativa distribuam a seqüência dos números de 1 a 6, nos círculos de modo que a soma dos três números, sobre qualquer um dos lados do triângulo seja a mesma. Por exemplo, igual a 10.

Informe aos alunos que um triângulo com essa propriedade é chamado de triângulo mágico.

Dê um tempo para os alunos se organizarem em grupos de 4 e discutirem até chegar a uma solução.

Verifique em seguida quantas e quais foram as soluções encontradas pelos grupos. Reúna-as na lousa de modo que possa ser feita uma

comparação entre as figuras, destacando as diferenças e semelhanças observadas. Podem ser colocadas soluções como essas:

Caso as diferenças e semelhanças não sejam observadas pelos alunos, na discussão, chame a atenção para os números colocados nos vértices e os números colocados nas posições intermediárias.

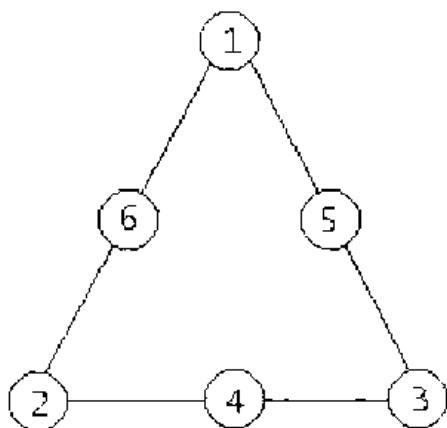
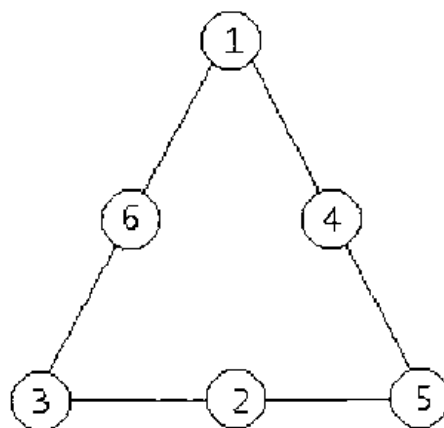
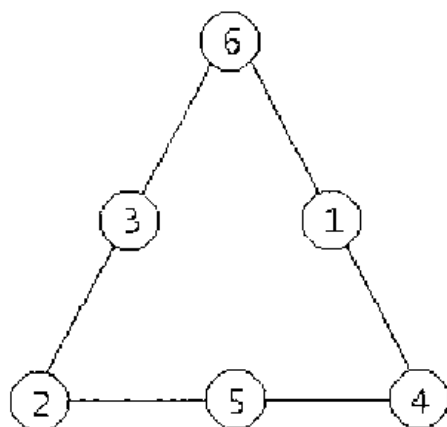
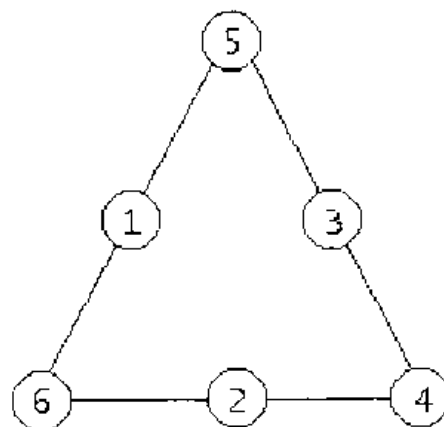
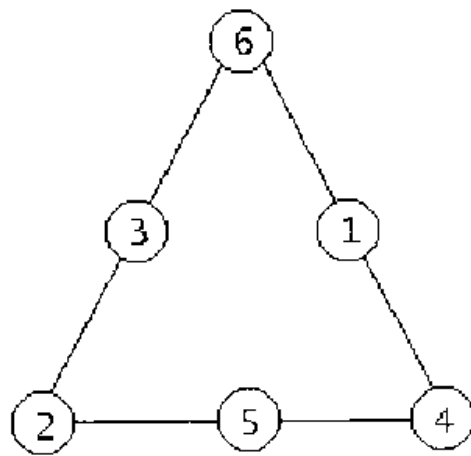
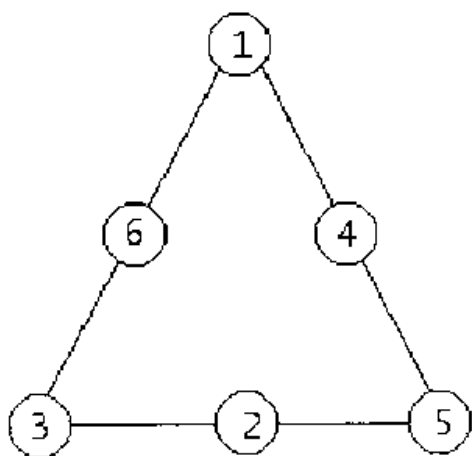
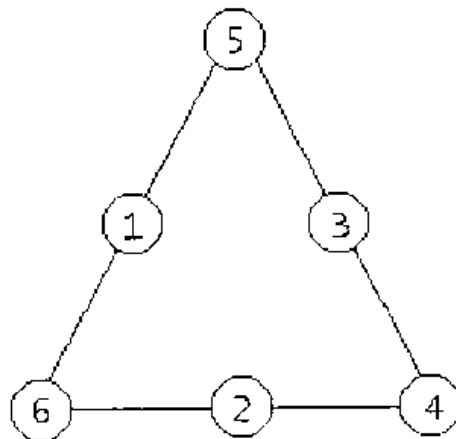
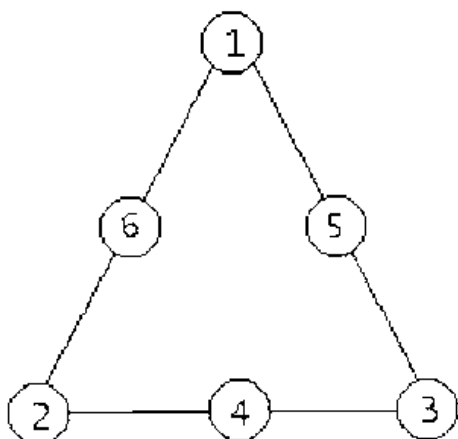
Considere todas as soluções apresentadas, como uma única, uma vez que os números localizados nos vértices (1, 3, 5) e os números intermediários (2, 4, 6) são sempre os mesmos. Nessa seqüência dada, os números ímpares ficaram nos vértices, enquanto os pares ficaram no meio. Além disso, a distribuição dos números intermediários não se dá de forma aleatória. Por exemplo: o 6 só pode ficar entre o 1 e o 3, assim como o 2 entre 3 e o 5. Observe que nas soluções encontradas os números são fixos ocorrendo apenas uma rotação do triângulo.

Proponha outros tipos de situações para os grupos, dando um tempo para discutirem cada uma delas:

- Distribua novamente os números, no triângulo, de modo a obter a mesma soma sobre os lados, porém, diferente de 10. É possível encontrar outras somas? Quais?

Qual é a maior e a menor soma possível de ser encontrada?

No processo de ensaio e erro que os alunos experimentarão para encontrar as soluções é provável que algumas propriedades do triângulo mágico sejam explicitadas. O que pode ser verificado através de uma sistematização das conclusões a que cada grupo chegou. Algumas delas são:

1. Há quatro soluções:

2. Nos triângulos de soma 10 e soma 11 houve uma inversão na posição dos números. No primeiro, os números ímpares ficaram nos vértices e os pares no meio, no segundo, os pares ficaram nos vértices e os impares no meio.

3. No caso do triângulo de soma 9 os números do vértice são os três menores (1, 2, 3) e no triângulo de soma 12 houve uma inversão, ficando os números maiores (4, 5, 6) nos vértices.

4. As soluções ocorrem aos pares, encontrada uma delas, troca-se os números dos vértices pelos números das posições intermediárias e encontra-se outra solução.

Ainda, usando esses mesmos critérios, proponha que eles construam triângulos mágicos com outras seqüências de números, por exemplo:

1) 2, 4, 6, 8, 10, 12.
2) 2, 3, 4, 9, 10, 11.

Pergunte se eles perceberam algum processo mais organizado, que permita determinar triângulos mágicos com qualquer seqüência de números.

COMENTÁRIOS:

Nesse tipo de problema é importante a tentativa, o ensaio e erro, pois assim, os alunos percebem propriedades importantes. Através de questões que podem ser levantadas conforme a discussão e as conclusões do grupo, alguns avanço vão sendo dados no sentido de uma generalização dessas propriedades.

Assim, após verificar se os grupos perceberam ou não critérios gerais para a construção de triângulos mágicos com qualquer seqüência de números, retome a seqüência inicial: 1, 2, 3, 4, 5 e sugira que formem todas as ternas possíveis com esses seis números e indique ao lado a soma dos termos de cada terna:

terna	soma
1 2 3	6
1 2 4	7
1 2 5	8
1 2 6	9
1 3 4	8
1 3 5	9
1 3 6	10
1 4 5	10
1 4 6	11
1 5 6	12

terna	soma
2 3 4	9
2 3 5	10
2 3 6	11
2 4 5	11
2 4 6	12
2 5 6	13
3 4 5	12
3 4 6	13
3 5 6	14
4 5 6	15

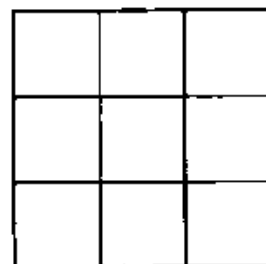
Observando essa tabela e entendendo que cada terna pode ser a distribuição de três números sobre um lado do triângulo, somente algumas delas correspondem a triângulos mágicos, aquelas que apresentam a mesma soma três vezes. Por exemplo para a soma igual a 10 temos as ternas: 1 3 6, 1 4 5 e 2 3 5, que colocadas sobre o triângulo, estarão nos vértices os números que aparecem duas vezes, pois eles são somados duas vezes.

Também é possível verificar que as somas possíveis, aquelas que aparecem três vezes são: 9, 10, 11 e 12.

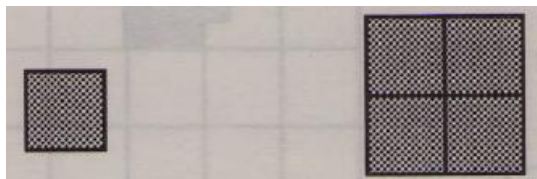
PARTE 2: O TABULEIRO.

MATERIAL NECESSÁRIO: Um pedaço de papel quadriculado de 8 x 8.

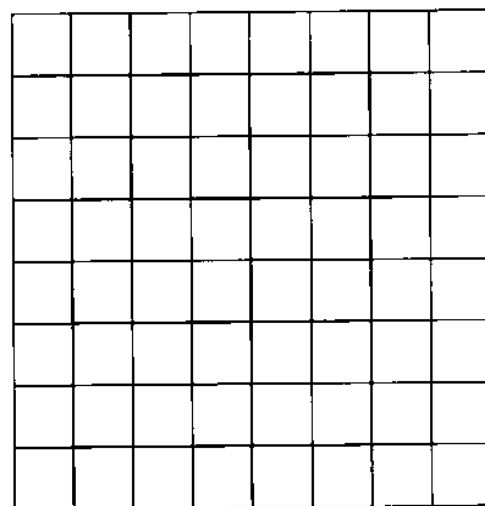
DESENVOLVIMENTO:

Coloque na lousa a figura quadriculada De 3 x 3 e pergunte aos alunos quantos quadrados há.

Dê um tempo para que eles discutam em grupo e cheguem a uma conclusão.

Analise as respostas dos grupos e discuta o método que utilizaram para descobri a quantidade de quadrados. Assim, será possível de imediato questionar a solução que considera 9, quando muito, 10 quadrados.

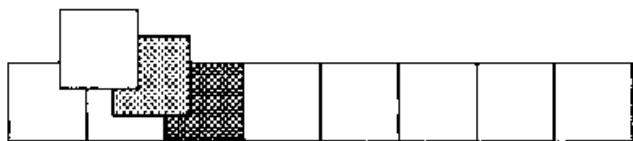
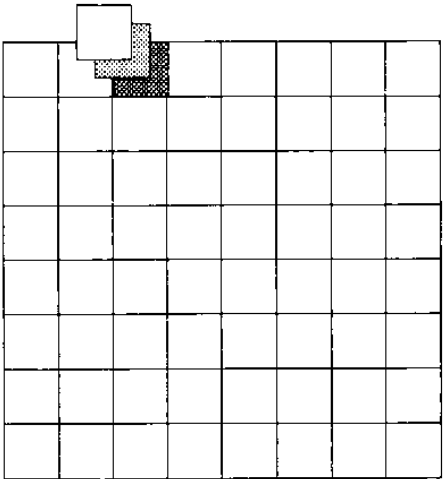
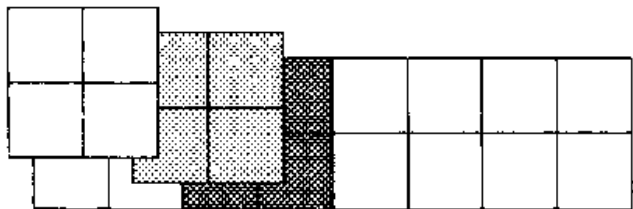
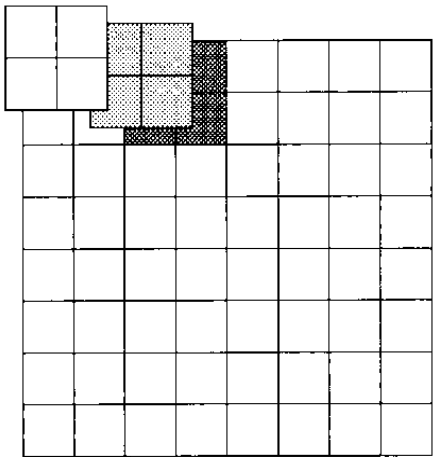
Observe se concluíram que há 14 quadrados já que devem considerar os quadrados de 1 x 1, 2 x 2 e 3 x 3.

Proponha a extensão desse raciocínio, apresentando na lousa ou entregando um papel quadriculado de 8 x 8, para cada aluno, através do seguinte problema:

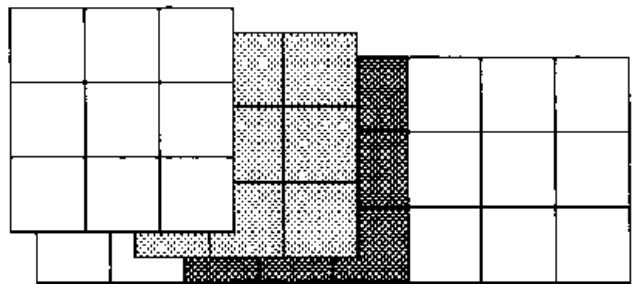
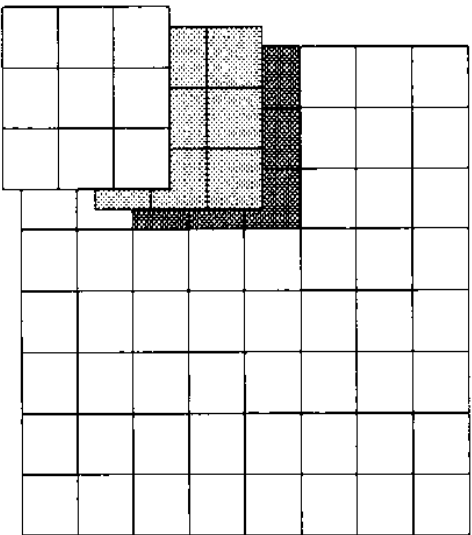
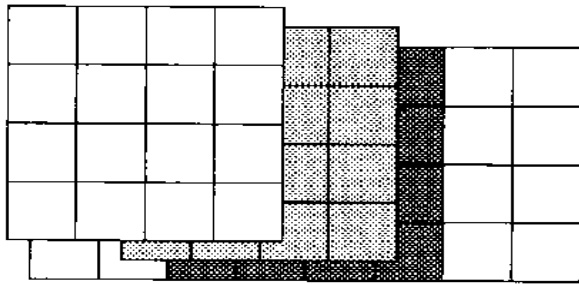
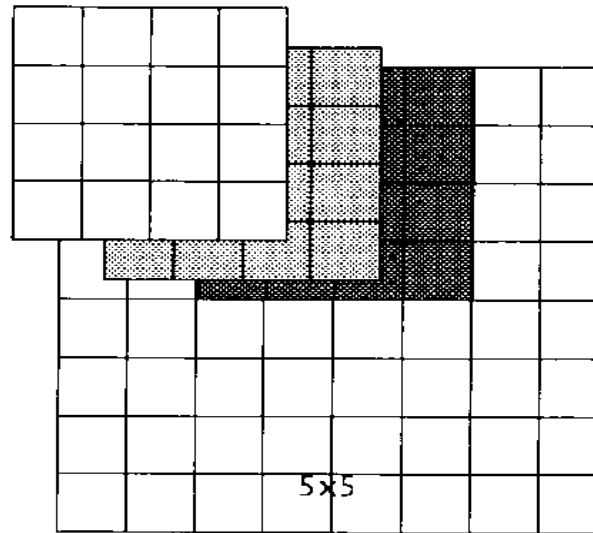
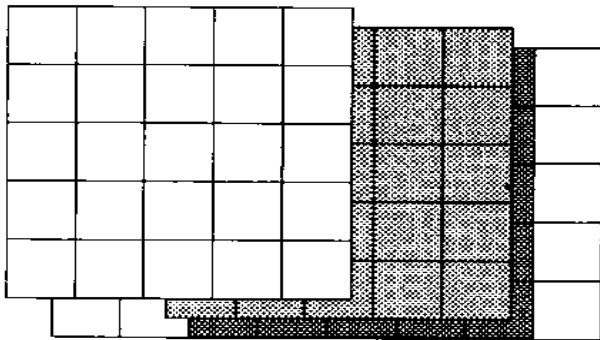
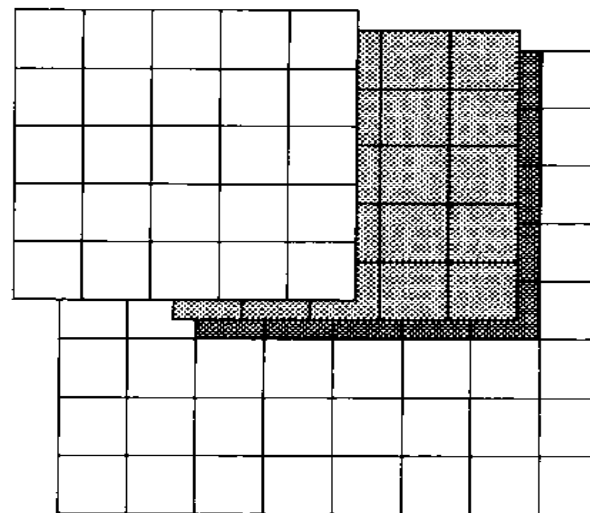
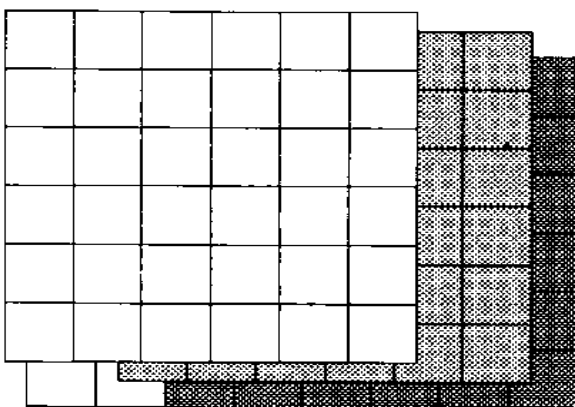
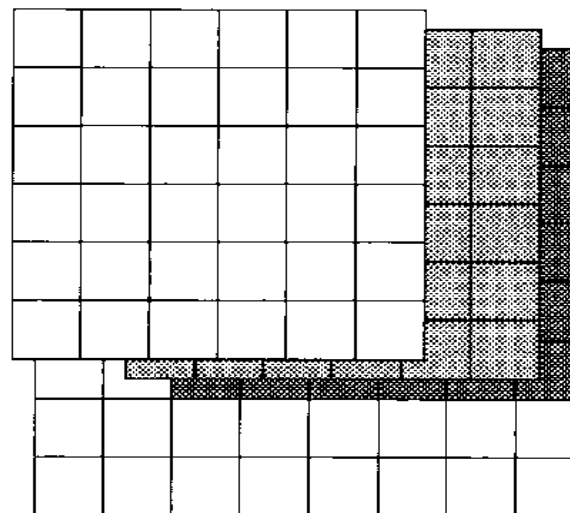
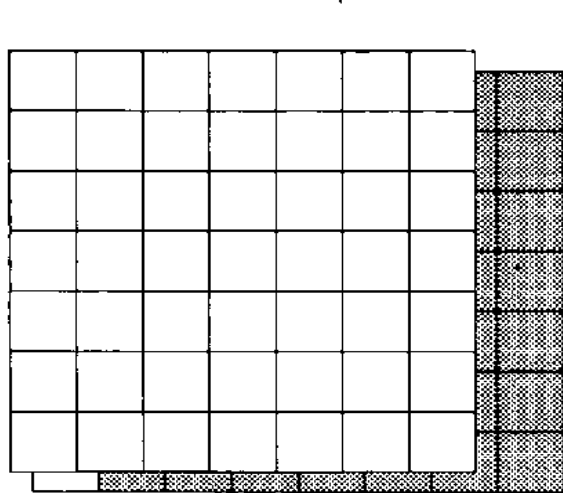
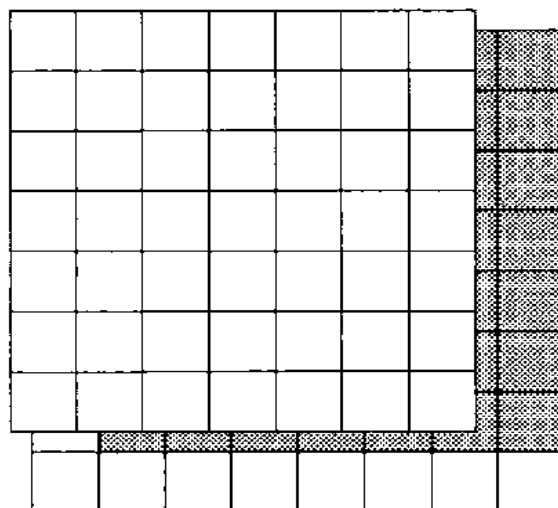
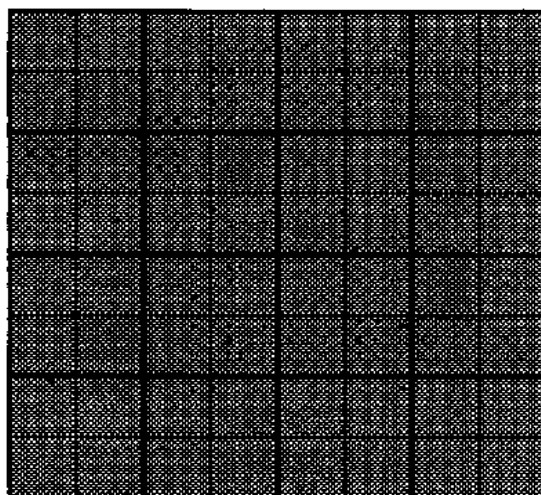
Sendo esta, uma representação de um tabuleiro de xadrez de 8 x 8. Determine a quantidade de quadrados da figura.

Dê um tempo para a discussão em grupo e verifique junto a cada um o processo utilizado para chegar ao resultado.

Caso eles apresentem dificuldades, chame a atenção para a situação anterior e observem como chegaram ao resultado. Se houver ainda alguma dificuldade, sugira que particularizem a situação, tomando outros quadriculados menores, de 4 x 4, 5 x 5, etc. para auxiliar nessa tarefa.

Após, os grupos terem chegado a uma conclusão, analise-as de modo a sistematizar o processo utilizado nesse cálculo. Para isso, será necessário destacar os diferentes tipos de quadrados que podem ser vistos na figura. Neste caso, há os quadrados que percebemos imediatamente, por isso é possível que apareçam inúmeras respostas, e há quadrados superpostos, cuja

percepção não é imediata, provocando algumas dificuldades. Sugira então que verifiquem por partes:

1. Os quadrados de 1 x 1:

8 x 8

2. Os quadrados de 2 x 2

7x7

3. Os quadrados de 3 x 3

6

4. Os quadrados de 4x4
5
5x5
5. Os quadrados de 5x5
4
4x4
6. Os quadrados de 6x6
3
3x3

7. Os quadrados de 7x7

8. O quadrado de 8x8

Após o cálculo da quantidade de cada tipo de quadrado, encontra-se o total de quadrados do tabuleiro de xadrez, que pode ser organizado da seguinte forma:

Tipo de quadrado	Quantidade de cada tipo
1 x 1	8 x 8 = 64
2 x 2	7 x 7 = 49
3 x 3	6 x 6 = 36
4 x 4	5 x 5 = 25
5 x 5	4 x 4 = 16

6 x 6	3 x 3 = 9
7 x 7	2 x 2 = 4
8 x 8	1
Total de quadrados	204

COMENTÁRIO:

Houve nesse tipo de problema o procedimento indutivo, em que de situações particulares foi-se deduzindo uma regra geral, para quadriculados com números de quadrados cada vez maior. Situações dessa natureza começam a ser mais freqüentes a partir da 7ª série. Proponha então aos alunos que indiquem um modo de calcular o número de quadrados de um tabuleiro de n x n.

PARTE 3: AS CORDAS.

MATERIAL NECESSÁRIO: Nenhum.

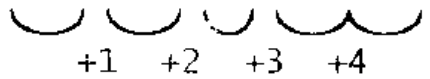
DESENVOLVIMENTO:

Peça aos alunos para desenharem diferentes círculos e marquem sobre a circunferência de cada um, 1, 2, 3, 4, 5, ... pontos e proponha o seguinte problema:

Verificar o número de cordas que podem ser traçadas em um círculo em função do números de pontos colocados sobre a circunferência.

Dê um tempo para os alunos discutirem em grupo e por ensaio e erro tentarem chegar a uma conclusão.

Após esse trabalho organize as conclusões a que os grupos chegaram e explicite o processo utilizado pelo grupo.

Proponha a construção de uma tabela relacionando as duas grandezas: número de pontos e números de cordas.

nº de pontos	1	2	3	4	5	6	7	8	9
nº de cordas	0	1	3	6	10	15	21	28	36

Faça perguntas do seguinte tipo:

- Quantas cordas podemos traçar com 5 pontos sobre a circunferência? E com 10?
- Que propriedade você observa na seqüência de números de cordas?
- É possível encontrar uma regra para determinar o número de cordas para qualquer quantidade de pontos?

Proponha então que eles analisem a tabela. Pode-se observar que a seqüência do número de cordas pode ser formada adicionando-se o 1 ao 0, o 2 ao 1, o 3 ao 2, o 4 ao 3 e assim sucessivamente. Desse modo podemos obter o número de cordas para 6 pontos, somando-se 5 ao número de cordas correspondente a 5 pontos na circunferência. Para se achar o número de cordas de n pontos, deve-se adicionar (n- 1) ao número de cordas relativos a (n – 1) pontos sobre a circunferência. A regra de formação da seqüência é:

nº de pontos	1	2	3	4	5	6 ...
nº de cordas	0	1	3	6	10	15 ...

+1 +2 +3 +4 +5...+6...

Outra propriedade observada na seqüência do número de cordas e que permite uma lei geral é:

nº pontos	nº cordas
1	0
2	1 = 0 + 1
3	3 = 0 + 1 + 2
4	6 = 0 + 1 + 2 + 3
5	10 = 0 + 1 + 2 + 3 + 4
6	15 = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5

Assim, para n pontos, o número de cordas é:

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + ... + (n - 1).$$

COMENTÁRIO:

Da mesma forma que na parte 2, o raciocínio indutivo foi aplicado aqui também. Chame a atenção dos alunos que cada parcela da adição, corresponde ao número de cordas que podemos traçar a partir de cada ponto, sem repetir nenhuma.

Embora a idéia de combinação esteja presente nesse problema, não é necessário aplicar a expressão:

$$C_{n.2} = \frac{n!}{2! . (n - 2)}$$

que envolve definições desnecessárias nesse momento.

ATIVIDADE 31: PROBLEMAS POLÍGONOS ESTRELADOS.

OBJETIVOS: Verificar possibilidades de construção de polígonos estrelados.
Investigar propriedades dos múltiplos e divisores de um número em situações problemas.

PARTE 1: A ESTRELA VIVA.

MATERIAL NECESSÁRIO: Um rolo de barbante
Papel sulfite.

DESENVOLVIMENTO:

Proponha a formação de círculos com um grupo de alunos de modo que cada um represente a ponta de uma estrela, um outro aluno vai passando um barbante de dois em dois colegas até desenhar uma estrela. Se você preferir faça essa atividade na quadra da escola.

Discuta com eles qual é o menor número de pontas que uma estrela pode ter? Por quê?

Como o barbante deve ser utilizado de modo a formar uma estrela?

Qual o maior número de pontas que uma estrela pode ter?

Qual a diferença que observam entre uma estrela de cinco e uma de seis pontas?

Recomende a ampliação do grupo à medida que desejarem construir uma estrela de maior número de pontas.

Uma alternativa a essa forma de trabalhar seria propor que os grupos de alunos desenhem pelo menos duas estrelas diferentes numa folha de papel sulfite, analisar suas respostas e discutir os mesmos tipos de questões.

PARTE 2: ESTRELAS REGULARES.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo I-31.

DESENVOLVIMENTO:

Apresente para os grupos uma folha-tipo I-31, onde os círculos já aparecem divididos em partes iguais, assim, as estrelas desenhadas são regulares, isto é, os lados e os ângulos terão a mesma medida. Evidentemente essa propriedade pode ser destacada pelos alunos, mediante suas observações e medições. As idéias aqui trabalhadas poderão ser aplicadas a polígonos não regulares.

Caso prefira, em lugar da folha-tipo, proponha aos alunos que dividam a circunferência em quatro partes iguais com o auxílio do transferidor, marcando a quantidade de pontos que quiserem.

Eles já puderam observar que quando traçamos todas as cordas de dois pontos consecutivos sobre a circunferência dividida em 3 ou mais partes, obtemos polígonos convexos.

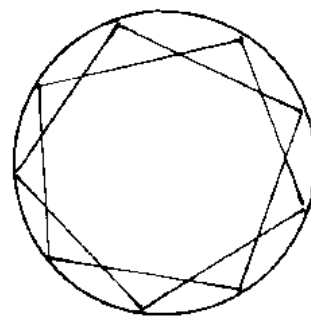
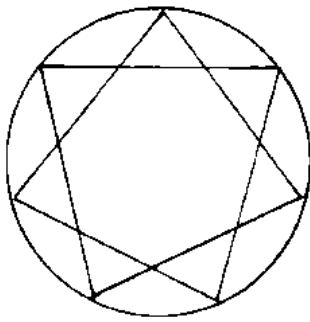
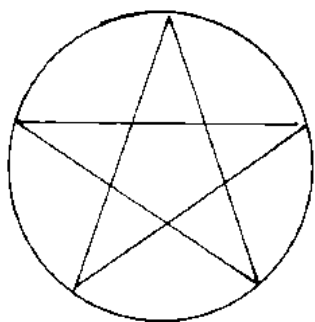
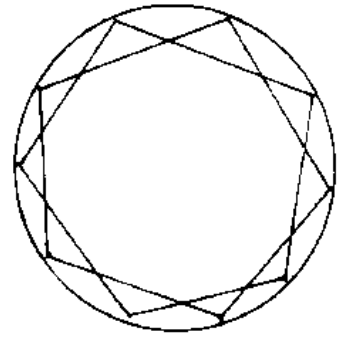
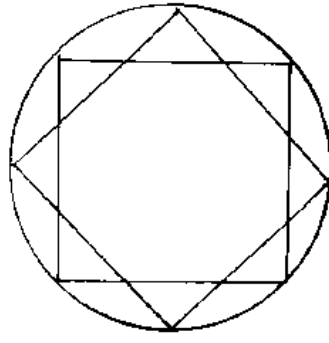
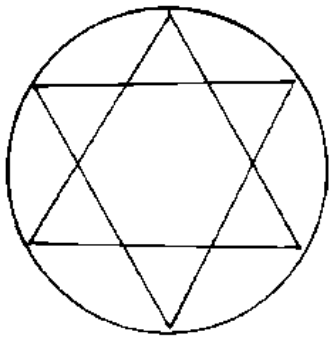
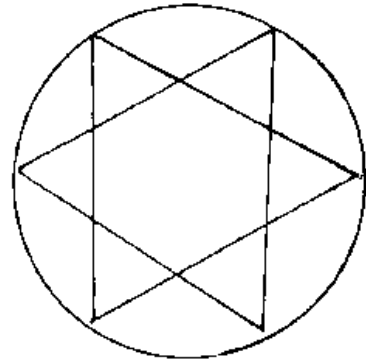
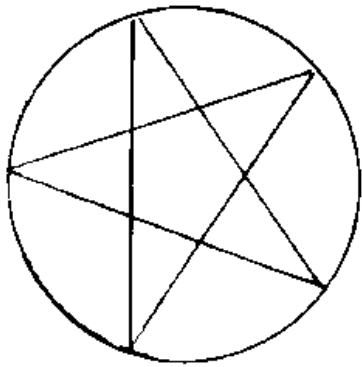
Solicite que desenhem cordas de duas em duas partes da circunferência, isto é, cordas para arcos que contenham duas das partes em que a circunferência foi dividida, de modo a utilizarem todos os pontos marcados na mesma e discutam o que observam nos seus traçados.

Levante questões do tipo:

O que observam na circunferência dividida em 6, 8 e 10 partes?

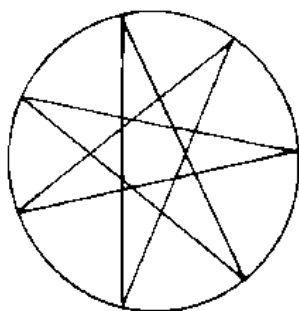
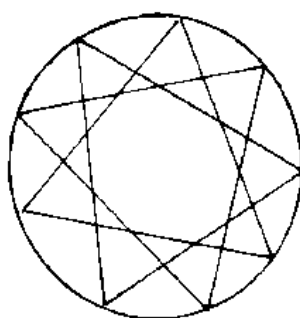
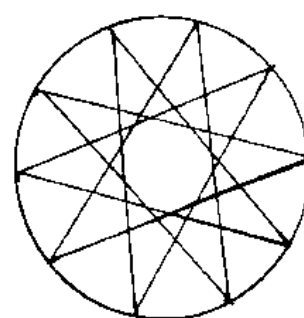
O que observam na circunferência dividida em 5, 7, 9 e 11 partes?

Discuta as observações, certifique-se de que os alunos perceberam a possibilidade de desenhar estrela de dois tipos:

- Polígonos estrelados, traçando cordas até chegar ao ponto de partida, sem interromper o processo, isto é, sem tirar o lápis do papel.

- Estrela formadas por outros polígonos regulares, como triângulos, quadrados, pentágonos, hexágonos, etc., sendo necessário tirar o lápis do papel.

Como exemplo desses dois tipos , destaque a estrela de cinco pontas que necessita das cinco cordas para fechar o polígono e a de seis pontas que é formada por dois triângulos eqüilátero, como as representantes de cada caso com menor número de lados.

Entregue a cada aluno outra cópia da folha-tipo I-31, para trabalharem em grupos de até 5 alunos. Solicite a cada grupo que ligue os pontos das divisões da circunferências de 3 em 3, de 4 em 4, de 5 em 5, de 6 em 6, de 7 em 7 partes, usando em cada caso uma cor diferente ou, se preferir, copiar as figuras para melhor observar o que acontece.

Algumas perguntas podem ajudar na discussão dessa atividade:

- É possível fazer as ligações pedidas? Quando é e quando não é possível?
- Continuarão aparecendo estrelas com as de 5 e 6 pontas? Há estrelas de outro tipo/ Qual?

Verifique se eles observam que há polígonos estrelados que podem ser formados sem tirar o lápis do papel, isto é, só se completa quando o último segmento chega ao ponto de partida (5, 7, 9, 11 partes) e que podem ser chamados, aqui, de polígonos estrelados não interrompidos. Há polígonos formados por polígonos regulares convexos (6, 8, 9, 10, 12 partes). Há ainda polígonos estrelados formados por polígonos estrelados (10, 14, 15 partes).

Polígono estrelado não interrompido	Polígono de Polígonos regulares convexos	Polígono estrelado de polígono estrelado

PARTE 3: ANALISANDO OS POLÍGONOS ESTRELADOS NÃO INTERROMPIDOS.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo II-31.

DESENVOLVIMENTO:

Entregue aos grupos uma folha-tipo II-31 e sugira aos mesmos que para organizar as observações, preencham as tabelas na ordem em que aparecem, após terem desenhados figuras de diferentes tipos. Destaque a

primeira tabela, verifique como foi preenchida pelos grupos e desenvolva a discussão.

POLÍGONOS ESTRELADOS NÃO INTERROMPIDOS

Nº de partes	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2 em 2	x		x		x		x		x		x
3 em 3			x	x		x	x		x	x	
4 em 4					x		x		x		x
5 em 5							x	x	x	x	
6 em 6											x
7 em 7											
8 em 8											
TOTAL	1	0	2	1	2	1	4	1	5	2	3

Ao preencherem essa tabela discuta algumas das suas características combinadas com as observações que fizeram ao desenharem os polígonos, se for necessário, repetir o traçado de alguns polígonos. A análise desses elementos deve levar em conta, entre outros, os seguintes aspectos:

- Porque há circunferências em que é possível o desenho de vários polígonos estrelados desse tipo e há outras onde nenhum é possível?
- Peça para compararem os casos em que o número de partes é primo e os casos em que não é. No primeiro caso, só é possível desenhar polígono estrelado não interrompido.

- Só é possível desenhar um polígono estrelado não interrompido tipo quando o número de partes tomadas e o total de partes são primos entre si.

- Os polígonos estrelados se repetem quando o número de partes consideradas nos dois casos somadas dão o número de partes total da circunferência. Por exemplo: de 3 em 2 e de 3 3m 3 são idênticos na circunferência de 5 partes, pois 2 + 3 = 5. Assim, considera-se apenas o primeiro deles.

- Por último, quando o número de divisões da circunferência é um número primo n, o número de polígonos estrelados possível é n : 2 – 1, tomando sempre resultados inteiros, isto é, a metade inteira do número menos um. Por exemplo:

  n = 11 a metade inteira de 11 é 5
  o total de polígonos estrelados é 4.

Peça então para verificarem as possibilidades para uma circunferência de 17 e de 18 partes. Eles deverão calcular e depois verificar experimentalmente.

PARTE 4: ESTRELAS DE POLÍGONOS CONVEXOS.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo II-31.

DESENVOLVIMENTO:

Coloque a segunda tabela da folha-tipo II-31 na lousa e solicite a ajuda dos grupos para preenchê-la de acordo com o que foram observando na segunda parte desta atividade. Discuta com eles que ao tentarem traçar um polígono estrelado o processo era interrompido porque se formavam triângulos, quadrados, pentágonos regulares, etc., sendo necessário mais de uma dessas figuras para se formar um polígono estrelado. Todos do mesmo tipo da estrela de 6 pontas.

Para preencher a tabela, peça aos grupos que analisem mais detalhadamente alguns casos que acharem necessários, observando não só a possibilidade de formação do polígono estrelado, mas o tipo e a quantidade de polígonos regulares necessários:

POLÍGONOS ESTRELADOS FORMADOS POR POLÍGONOS REGULARS CONVEXOS.

	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2 em 2		x		x		x		x		x	
3 em 3					x			x			x
4 em 4								x			
5 em 5											x
TOTAL		1		1	1	1		3		1	2

Discuta com eles o fato de que esse tipo de polígono ocorre quando o número de partes em que a circunferência esta dividida é múltiplo do número de partes tomadas, observando que o número destas deve ser menor que a metade do total de partes.

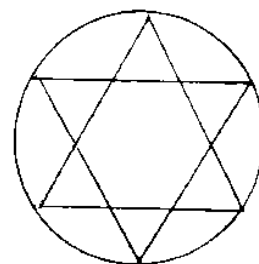
Proponha uma discussão sobre o fato de se ter 3 estrelas de 12 pontas e 2 de quinze.

Da constatação dos tipos e da quantidade de polígonos regulares convexo utilizados para formar o polígono estrelado preencha uma outra tabela como esta:

TIPOS E QUANTIDADES DE POLÍGONOS REGULARES USADOS

	6	8	9	10	12	14	15
Nº Triângulos	2		3		4		5
Nº quadrados		2			3		
Nº pentágonos				2			3
Nº hexágonos					2		
Nº heptágonos						2	

Analise com os alunos algumas propriedades de múltiplos e divisores interessantes, tomando algumas figuras como base.

No caso da estrela de 6 pontas ela é constituída de 2 triângulos, como cada triângulo tem 3 pontas então 6 = 2 x 3 (dois triângulos).

No caso da estrela de 12 pontas ela pode ser constituída de:

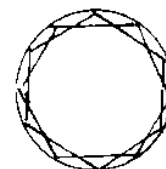
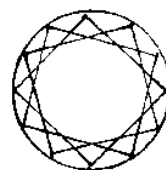
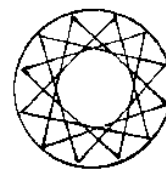
4 triângulos (3 pontas cada) então

12 = 4 x 3

3 quadrados (4 pontas cada) então

12 = 3 x 4

2 hexágonos (6 pontas cada) então

12 = 2 x 6.

Chame a atenção dos alunos para o fato de que esses produtos relacionam a quantidade e o tipo (nº de vértices) do polígono regular necessário para a formação da estrela de 12 pontas, onde vemos esses fatores como divisores de 12. Pergunte porque há outros produtos e outros fatores que não aparecem como por exemplo: 12 = 6 x 2, 12 = 12 x 1 e 12 = 1 x 12?

Interprete com eles o sentido de cada uma dessas multiplicações:

12 = 6 x 2 significaria 6 polígonos de 2 vértices para formar uma estrela de 12 vértices, o que não é possível.

12 = 12 x 1 significaria 12 polígonos de 1 vértice !!!
12 – 1 x 12 significaria 1 polígono de 12 vértices, não é estrelado.

As 6 multiplicações envolvem todos os 6 divisores de 12 : { 1, 2, 3, 4, 6, 12 }, mas apenas 3 delas relacionam-se a polígonos estrelados.

Analise agora o caso dos produtos que resultam 6:
6 = 2 x 3 (dois polígonos de 3 vértices) – estrelas de 2 triângulos
6 = 3 x 2 (três polígonos de 2 vértices) – impossível
6 = 6 x 1 (seis polígonos de 1 vértice) – impossível
6 = 1 x 6 (um polígono de 6 vértice) – não é estrelado

As 4 multiplicações envolvem todos os 4 divisores de 6 (1, 2, 3, 6), mas, apenas 1 indica polígonos estrelados.

Após propor a análise de outros casos, entre eles alguns números primos, e a discussão sobre o número de estrelas é possível sistematizar um modo para determinar quantos polígonos estrelados formados de polígonos regulares pode-se obter numa circunferência dividida em partes iguais.

Nº de estrelas = nº de divisores – nº de multiplicações não relacionadas a estrelas

Nº de pontas	Nº de divisores	Nº de multiplicações não relacionadas a estrelas	Nº de estrelas
12	6	3	6 – 3 = 3
6	4	3	4 – 3 = 1
15	4	2	4 – 2 = 2
13	2	2	2 – 2 = 0

COMENTÁRIOS:

Até agora pode-se concluir que os polígonos estrelados formados de polígonos regulares convexos só são possíveis para números que não sejam primos, pois os números primos só tem dois divisores e duas multiplicações, nenhuma correspondendo a polígonos estrelados.

A partir da discussão de diferentes situações outras conclusões podem ser tiradas junto aos grupos:

- O total de estrelas de n pontas, quando n é par e n > 6 e igual ao número de divisores de n menos 3. Esse 3 corresponde às multiplicações n = 1 x n, n = n x 1, e n = k x 2, que não estão relacionadas a polígonos estrelados.

- O total de estrelas de n pontas n é impar é igual ao número de divisores de n menos 2. Esse 2 corresponde às multiplicações n = 1 x n e n = n x 1 que não estão relacionadas a polígonos estrelados.

PARTE 5: POLÍGONO ESTRELADO DE POLÍGONO ESTRELADO.

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo II-5.

DESENVOLVIMENTO:

Coloque a terceira tabela da folha-tipo II-31 na lousa e solicite aos grupos que o ajudem a preenchê-la.

POLÍGONOS ESTRELADOS DE POLÍGONOS ESTRELADOS

	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2 em 2 partes											
3 em 3 partes											
4 em 4 partes						x				X	
5 em 5 partes											
6 em 6 partes					X					x	x
7 em 7 partes											

Proponha também a observação e especificação dos tipos e da quantidade de polígonos estrelados necessários par a formação de outros polígonos estrelados:

TIPOS E QUANTIDADES DE POLÍGONOS ESTRELADOS

	10	14	15
Nº de Pentágonos estrelados	2		3
Nº de Heptágonos estrelados		2	
Etc.			

Nesta tabela estão polígonos estrelados que são interrompidos e constituídos de mais de um polígono estrelado, diferentemente da primeira tabela onde o polígono estrelado era um só.

Analise com os grupos os resultados observados e tente verificar com eles porque isso acontece.

Na análise da primeira tabela verificou-se que o polígono estrelado único (não interrompido) era possível quando o número de partes da circunferência e a quantidade de partes tomadas para traçar a corda eram primos entre si. Na análise da segunda tabela a estrela era composta de polígonos regulares convexos, quando o número total de partes da circunferência era múltiplos do número de partes tomadas. Nesta última quando o total de partes da circunferência e o número de partes tomadas não são primos entre si, nem o primeiro é múltiplo do segundo, mas há um fator comum entre ambos, temos um polígono estrelado formado por polígonos estrelados e a quantidade destes, corresponde ao fator comum.

Por exemplo: Na circunferência de 10 partes, quando são tomadas de 4 em 4 partes, obtemos 2 polígonos estrelados, como são dois em 10 partes o tipo de polígono é o pentágono estrelado. Aqui, não é necessário tomar de 6 em 6 parte, (10 e 6 tem como fator comum), mas teríamos a

repetição dos dois pentágonos estrelados, uma vez que 6 + 4 = 10.

No caso da circunferência de 14 partes, quando se toma de 4 em 4 é o mesmo que tomar de 10 em 10 partes, pois, 4 + 10 = 14. A quantidade de polígonos estrelados é 2 (fator comum entre 14 e 4) e o tipo de polígono é o heptágono estrelado, semelhante ao da circunferência de 7 partes tomadas de 2 em 2. Nessa mesma circunferência, quando tomamos de 6 em 6 é o mesmo que tomar de 8 em 8 partes, pois 6 + 8 = 14. O fator comum entre 14 e 6 também é 2 isto significa que teremos 2 heptágonos estrelados de outro tipo, semelhante ao da circunferência de 7 partes quando tomadas de 3 em 3.

Essas relações podem ser observadas em outras circunferências, proponha aos alunos que discutam o caso da circunferência de 15 e de 16 partes.

COMENTÁRIOS:

Além de todas as observações feitas fica evidente que para traçarmos polígonos estrelados ou não em circunferências divididas em $\underline{n}$ partes deveremos tomar x partes por vez de modo que o máximo valor de $\underline{x}$ é:

1) $x = n : 2 - 1$ se n for par e

2) $x = (n - 1) : 2$ se n for ímpar.

Comentário final: Esta atividade contém muitas informações, permitindo uma ampla exploração das propriedades dos polígonos estrelados, por isso o trabalho pode tornar-se muito extenso. Está sendo apresentado o maior número possível de informações, e você poderá selecionar aquelas que achar mais interessante para o trabalho na sala de aula.

FOLHA-TIPO I-31

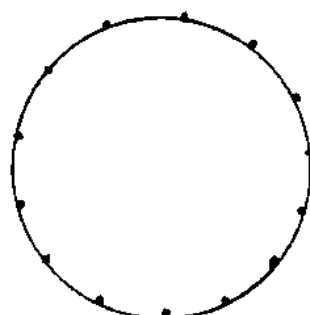
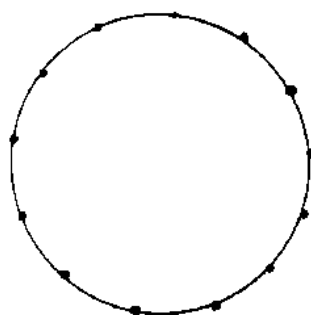
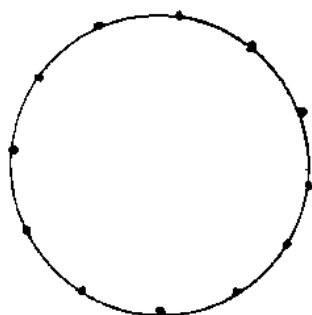
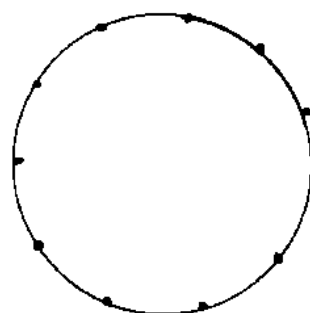
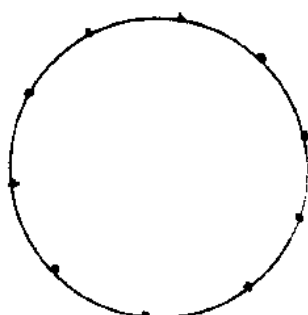
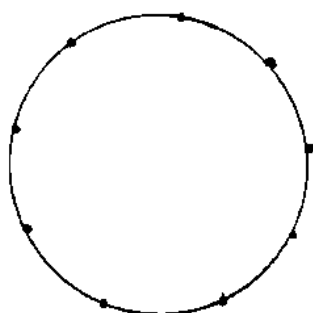
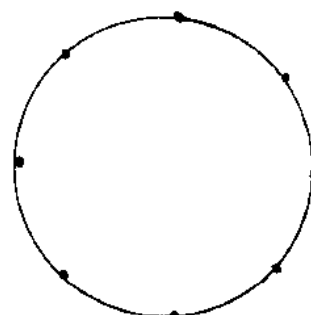
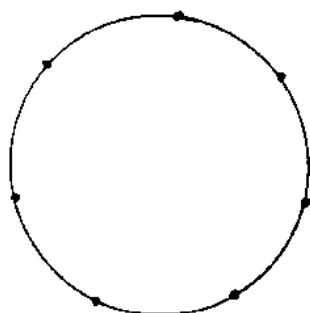
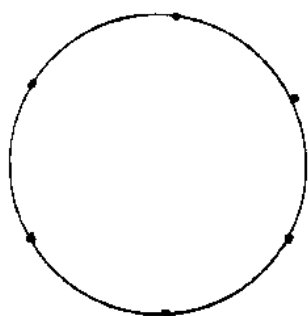
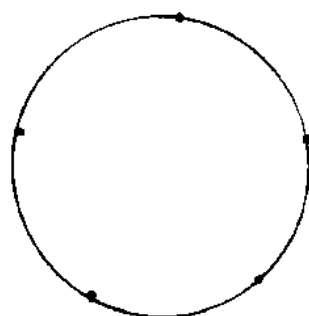
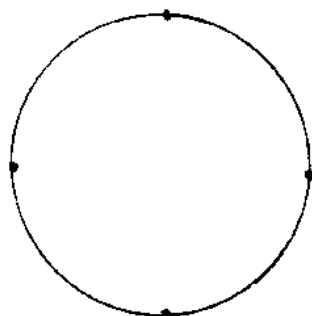
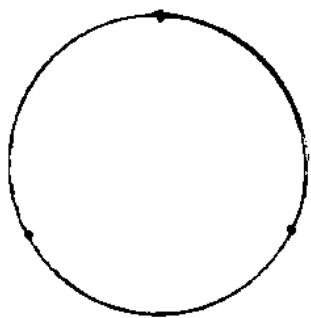
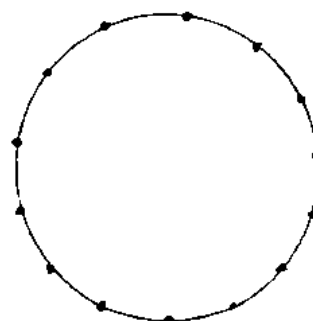
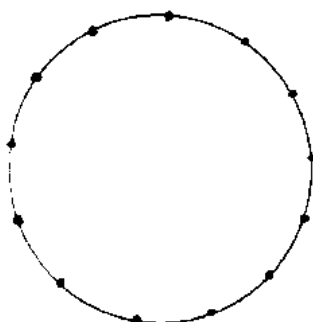
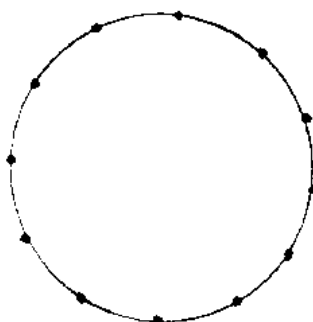
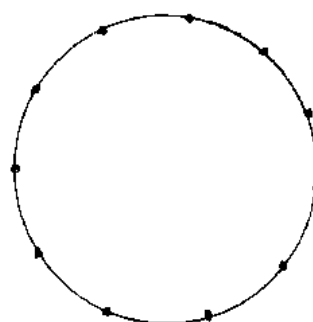
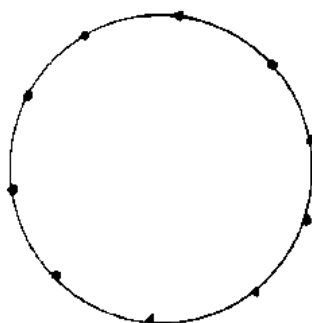
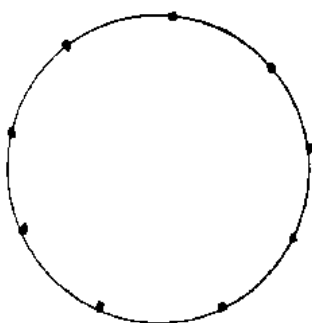
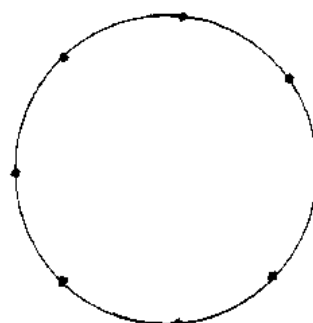
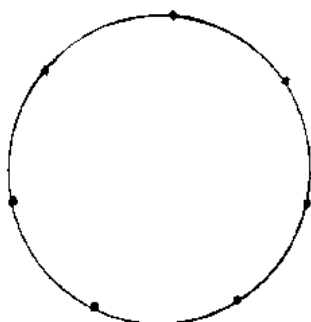
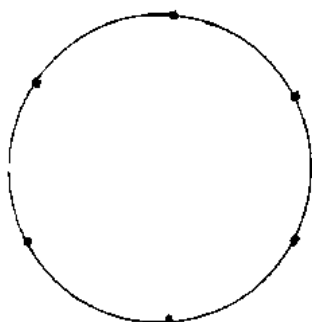
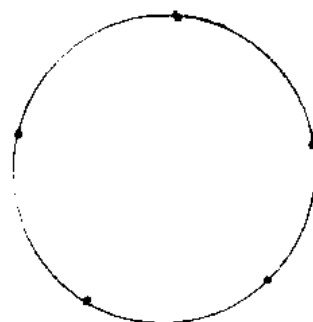
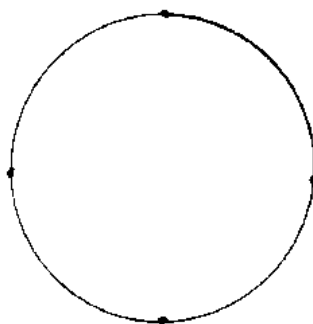
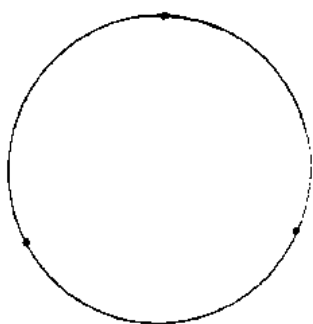
Continuação

FOLHA-TIPO II-31

TABELA 1

POLÍGONOS ESTRELADOS NÃO INTERROMPIDOS

	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2 em 2 partes											
3 em 3 partes											
4 em 4 partes											
5 em 5 partes											
6 em 6 partes											
7 em 7 partes											
Total											

TABELA 2

POLÍGONOS ESTRELADOS FORMADOS COM POLÍGONOS REGULARES

	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2 em 2 partes											
3 em 3 partes											
4 em 4 partes											
5 em 5 partes											
6 em 6 partes											
7 em 7 partes											

TABELA 3

POLÍGONOS ESTRELADOS FORMADOS POR POLÍGONOS ESTRELADOS

	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4 em 4 partes											
6 em 6 partes											

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

ASOCIACION DE MAESTRO ROSA SENSAT. **Didactica de los números enteros**. Madri: Editorial Nuestra Cultura, 1980.

BOLD. Brian. **Atividades matemáticas**. Tradução por Leonor Moreira. Lisboa: Gradiva Publicação, 1991. (Coleção Prazer da Matemática).

BOYER, Carl B. **Cálculo**. Tradução por Hygino H. Domingos. São Paulo: Atual, 1992, (Tópicos de História de Matemática).

__________ . **História da matemática**. Tradução por Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blücher/UNESP, 1974.

CARACA, B. de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Brás Monteiro, 1975.

CARRAHER, Terezinha Nunes. (Org**.). Aprender pensando**: contribuições da psicologia cognitiva para a educação. Recife: Secretaria da Educação do Estado de Pernambuco?UFP, 1983.

CASTELNUOVO, Emma. **Didática dela matemática moderna**. Tradução por Felipe Robledo Vázques. México: [s.n.], 1973.

__________. **Figure e fórmule**. Itália. La Nuova Itália, 1989.

DANTIZIG, Tobias. **Número: a linguagem da ciência**. Tradução por Sérgio Goes de Paula. Rio de Janeiro: Zahar, 1970.

D'AUGUSTINE, Charles H. **Métodos modernos para o ensino da matemática**. Tradução por Maria Lúcia F.E.Peres. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1984.

DAVIS, Philip., HERSH, Reuben. **A experiência matemática**. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1989.

EVANS, I.O. **O planeta terra**. Tradução por Helena T.Katz. São Paulo: Melhoramentos, [19 _ _]. (Prisma).

EVES, Howard**. Geometria**. São Paulo: Atual, 1992. (Coleção História da Matemática).

GUELLI, Oscar. **Dando corda na trigonometria**. São Paulo: Ática, 1993. (Coleção Contando a História da Matemática para uso em sala de aula).

IMENES, JAKUBO E LELIS. **Números negativos**. São Paulo: Atual, 1993. (Coleção Pra que serve a Matemática).

IMENES, Luiz Márcio. **Descobrindo o teorema de Pitágoras**. São Paulo: Scipione, 1987. (Coleção Vivendo a Matemática)

KAMII, Constance. **A criança e o número**. Capinas: Papirus, 1984.

KARLSON, Paul. **A magia dos números**. Campinas: Papirus, 1984.

MONTEIRO, Luis Henrique Jacy. **Elementos de álgebra**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1969.

MUNÉ, José Junqueira. **Didática Del cálculo**. Barcelona: Editorial Labor, 1969.

NICOLSON, Iain. **Astronomia**. Tradução por Geraldo Galvão Ferraz. São Paulo: Melhoramentos, [19 _ _]. (Prisma).

MACHADO, Nilson José. **Medindo comprimento**. São Paulo: Scipione, 1987. (Coleção Vivendo a Matemática).

NIVEN, Ivan. **Números: racionais e irracionais**. Rio de Janeiro: SBM, 1984.

PENTEADO, José de Arruda. **Curso de Desenho**. São Paulo: Nacional, 1973.

PÉREZ, Julia Centeno. Números decimais. Por que? Para que? Madrid: Editorial Sintesis. 1988.

RÁDICE, Lúcio L. **A matemática de Pitágoras a Newton**. Tradução por Barbara Martins Costa. Lisboa: Edição 70, 1971.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. São Paulo, Sociedade Brasileira Semestral.

Caixa Postal, Semestral. Caixa Postal, 20570, CEP 01498.

SÂO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. Proposta curricular para o ensino da matemática: 1 0186 grau. São Paulo: SE?CENP, 1988.

______. Atividades Matemáticas: ciclo básico. 3. Ed. São Paulo: SE/CENP, 1991. V.1.

______. Atividades matemáticas: ciclo básico. 5. Ed. São Paulo: SE/CENP, 1991. V.2.

______. Atividades matemáticas: 3ª série do 1º grau. 4.ed. São Paulo: SE/CENP, 1991.

______. Atividades matemáticas: 4ª série do 1º grau. 2.ed. São Paulo SE/CENP, 1990.

______. Proposta curricular para o ensino de geografia: 1º grau. São Paulo: SE/CENP, 1991.

______. Proposta curricular par o ensino de matemática: 2º grau. São Paulo. SE/CENP, 1990.

______. Proposta curricular de matemática para a habilitação específica do magistério. São Paulo: SE/CENP, 1990.

______. Matemática – 1º grau: 5ª a 8ª série. São Paulo: SE/CENP, 1992. (Prátic Pedagógica).

SOLOMON, Charles. Matemática. Tradução por Maria Pia Brito Charlier. São Paulo: Melhoramentos,
[19 _ _]. (Prisma).

VYGOTSKY, Lev S. Pensamento e linguagem. Tradução por M. Resende. Lisboa: Ed. Antídoto, 1973.

WAGNER, Eduardo. Construções geométricas. São Paulo: SBM, 1993. (Coleção do Professor de Matemática).